Schaum

Los textos de la serie Schaum se han convertido en clásicos, por estar a la vanguardia en el estudio, y por ser una inestimable ayuda para el alumno a la hora de adquirir conocimiento y pericia completos en la materia que se aborda.

Cada capítulo está estructurado de la siguiente manera:

- **Teoría:** resumen de las definiciones, principios y teoremas pertinentes, que sirve al estudiante como repaso.
- **Problemas resueltos:** completamente desarrollados, y con grado creciente de dificultad.
- **Problemas propuestos:** dando en cada caso la solución indicada, permiten al estudiante afianzar los conocimientos adquiridos y aplicarlos con destreza en nuevas situaciones.

1604
160-6

McGraw Hill

Schaum MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Schaum

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Frank Ayres, Jr.

- Esta edición incluye teoría necesaria para comprender los fundamentos de las matemáticas financieras
- Contiene 234 problemas resueltos, totalmente explicados
- Incluye 302 problemas propuestos con la respectiva respuesta

Utilizado por millones de estudiantes y recomendado por profesores de todo el mundo

McGraw Hill

MATEMATICAS FINANCIERAS

POR

FRANK AYRES, JR., Ph.D.

Profesor y Jefe del Departamento
de Matemática del Dickinson College

TRADUCCION Y ADAPTACION

FERNANDO OCAMPO COMPEAN

Actuario, Universidad Nacional Autónoma de México
Director Técnico de PanAmerican de México, Cía. de Seguros, S. A.

McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID • NUEVA YORK
PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Atlacomulco 499-501, Fracc. Ind. San Andrés Atoto
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1890

ISBN 968-422-160-6

Traducido de la primera edición en inglés de
MATHEMATICS OF FINANCE

11023456789 ING-91 9087543216

Impreso en Colombia Printed in Colombia

Esta obra se terminó de
imprimir en Septiembre de 1997
Impreandes Presencia S. A.

Se tiraron 7.400 ejemplares

Prólogo

Este libro se ha proyectado de manera que pueda usarse o bien como complemento de cualquier texto corriente, o bien como manual para un curso formal de matemática financiera. También servirá como obra de consulta y como texto para el aprendizaje sin maestro.

Cada capítulo comienza con una clara exposición de definiciones y principios, acompañados de material ilustrativo y descriptivo. Siguen luego grupos graduados de problemas resueltos y problemas propuestos. Los problemas resueltos ilustran y amplían los principios, destacan los puntos claves sin los cuales el estudiante continuamente se sentirá inseguro, y suministran la repetición de las propiedades básicas, tan vitales para un aprendizaje efectivo. Nos hemos esforzado por presentar este material en forma simple y concisa. En los problemas resueltos se incluyen muchas deducciones de resultados básicos. El gran número de problemas propuestos, con sus respuestas, sirve como repaso completo del material de cada capítulo; además, después del último capítulo se incluye un grupo muy variado de problemas de repaso general.

Los tres primeros capítulos son una revisión del álgebra necesaria para entender los conceptos presentados en los capítulos siguientes. Se incluyen allí, como aplicaciones, problemas de descuento comercial y por pago al contado, y algunos procedimientos sencillos para calcular la depreciación de activos.

Puesto que muchos lectores no tendrán máquinas calculadoras, se ha empleado en todo el libro la multiplicación abreviada (véase el capítulo 1). En esta sección se han formulado las reglas fundamentales que establecen el número de dígitos que se toman de las diversas tablas de interés.

A causa de su creciente importancia, los pagos parciales y compras a plazo se estudian detalladamente. Debemos también llamar la atención sobre el tratamiento de la anualidad general, que suele dar tanto trabajo y que aquí se basa en el caso sencillo junto con el concepto de tasas equivalentes.

Se ha incluido mucho más material del que se puede ver generalmente en el primer curso. Esto se ha hecho con el fin de que el texto sea más flexible y útil como obra de consulta, y para estimular el interés por los temas.

El autor agradece a la Financial Publishing Company su permiso para reducir a ocho cifras decimales partes de sus tablas de interés compuesto y anualidades. Desea también expresar su agradecimiento al personal de la Schaum Publishing Company por su magnífica colaboración.

FRANK AYRES, JR.

TABLA DE MATERIAS

Capítulo 1

Operaciones con números

LOS NUMEROS 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, . . .

son conocidos como *números naturales* ya que se derivan en forma natural del proceso de contar

Para sumar dos cualesquiera de dichos números, digamos 5 y 7, empezamos con 5 (o con 7) y contamos hacia la derecha siete (o 5) números para obtener 12. Debido a que no existe un número natural mayor que todos los demás, siempre la suma de dos números naturales es un número natural, es decir, siempre es posible la suma.

Para restar 5 de 7, a partir de 7 contamos 5 números hacia la izquierda hasta 2. La operación de resta (o sustracción), sin embargo, no puede ser efectuada en todos los casos. Por ejemplo, 7 no puede ser restado de 5 ya que únicamente hay cuatro números a la izquierda de 5. Para que siempre sea posible efectuar la resta, es necesario crear nuevos números para colocarlos a la izquierda de los números naturales. El primero de ellos, 0, es conocido como cero, y los demás -1, -2, -3, -4, -5, . . . son conocidos como enteros negativos. Estos nuevos números junto con los números naturales (llamados ahora enteros positivos y representados como $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, $+5$, . . .) forman el conjunto

$$(a) \qquad \ldots, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, \ldots$$

que no tiene principio ni fin. La operación de suma y resta (o sea, contar hacia la derecha o izquierda) siempre es posible sin excepción. Por razones prácticas el signo $+$ normalmente se omite.

Para sumar dos enteros como $+7$ y -5, empezamos con $+7$ y contamos hacia la izquierda (dirección indicada por el signo de -5) cinco números hasta $+2$, o empezando con -5 contamos hacia la derecha (dirección indicada por el signo de $+7$) siete números hasta $+2$. ¿Cómo sumaría -7 y -5?

Para restar $+7$ de -5, empezamos con -5 y contamos hacia la izquierda (dirección opuesta a la indicada por el signo de $+7$) siete números hasta -12. Para restar -5 de $+7$, empezamos con $+7$ y contamos hacia la derecha (dirección opuesta a la indicada por el signo de -5) cinco números hasta $+12$. ¿Cómo restaría $+7$ de $+5$? ¿Cómo restaría -5 de -7 y -7 de -5?

Si se quiere operar fácilmente con números positivos y negativos, es necesario evitar el proceso de contar. Para hacerlo notamos que cada uno de los números $+7$ y -7 está a siete posiciones de 0. Este hecho lo indicamos diciendo que el *valor numérico* de cada uno de los números $+7$ y -7 es 7. En general, el valor numérico

de 0 es 0

de $a \neq 0$ es: $\begin{cases} a \text{ si } a \text{ es positivo} \\ -a \text{ si } a \text{ es negativo} \end{cases}$ (La expresión $a \neq 0$ debe leerse "a diferente de 0".)

Continuando, después de memorizar ciertas tablas de suma y multiplicación, utilizamos las siguientes reglas.

Regla 1. *Para sumar dos números con signos iguales, se suma el valor numérico y se antepone el signo común.*

Por ejemplo,
$$+7+(+5) = +(7+5) = +12$$
$$-6+(-9) = -(6+9) = -15$$

Regla 2. *Para sumar dos números con signos diferentes, se resta el valor numérico menor del mayor y se antepone el signo del número con mayor valor numérico.*

Por ejemplo,
$$+13+(-5) = +(13-5) = +8$$
$$+4+(-18) = -(18-4) = -14$$

Regla 3. *Para restar un número, se cambia el signo y se suma.*

Por ejemplo,
$$14-(-6) = 14+6 = 20$$
$$-8-(-9) = -8+9 = 1$$
$$-8-(7) = -8+(-7) = -15$$

ya que
$$3(2) = 2+2+2 = 6 = 3+3 = 2(3)$$

podemos suponer que
$$(+3)(+2) = +6, \quad (+3)(-2) = -6, \quad \text{y} \quad (-3)(+2) = -6$$

Falta por considerar el producto de dos números negativos, por ejemplo, $(-3)(-2)$. Ya que $-3 = -(+3)$, tenemos $(-3)(-2) = -(+3)(-2) = -(-6) = +6$. De aquí podemos establecer:

Regla 4. *Para multiplicar dos números o dividir un número entre otro* (la división entre cero nunca es permitida), *se multiplica o divide el valor numérico y se antepone el signo + si los dos números tienen el mismo signo, y el signo — si tienen signos diferentes.*

Aún cuando las reglas anteriores han sido ilustradas con enteros positivos y negativos, es de suponerse que son aplicables tanto a las fracciones comunes como a los números irracionales tratados más adelante.

Véase el problema 1.

FRACCIONES COMUNES. En los ejercicios del problema 1, los cuales utilizan la división, todos los cocientes resultan enteros. Esto ha sido necesario porque en el conjunto de enteros mencionado, no existe un símbolo para representar, por ejemplo, el resultado de dividir 3 entre 4. Si la división entre un entero distinto de cero ha de ser posible, sin excepción, deben ser inventados símbolos adicionales (números). Estos símbolos conocidos como *fracciones comunes* han sido representados indicando la operación que ha de efectuarse (utilizando el signo /); por ejemplo, $1 \div 2 = 1/2$, $3 \div 4 = 3/4$, $-2 \div 3 = -2/3, \ldots$.

Sean a y b dos enteros positivos cualesquiera diferentes. Si en la escala (a) el entero a está situado a la izquierda del entero b, decimos que a es menor que b, lo cual se representa como $a < b$. Si por el contrario, a está situado a la derecha de b, decimos que a es mayor que b y lo representamos como $a > b$. Si $a < b$, la fracción (común) a/b se le conoce como *propia;* en caso contrario como *impropia*. Las fracciones propias del tipo a/b son:

$$\begin{array}{c} 1/2 \\ 1/3 \quad 2/3 \\ 1/4 \quad 2/4 \quad 3/4 \\ 1/5 \quad 2/5 \quad 3/5 \quad 4/5 \\ 1/6 \quad 2/6 \quad 3/6 \quad 4/6 \quad 5/6 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Sean c/d y e/f dos fracciones cualesquiera del conjunto anterior. El problema que surge es: ¿Cómo podemos conocer cuándo $c/d = e/f$, $c/d < e/f$ o $c/d > e/f$? Esto nos conduce a la regla más común en la operación con fracciones:

Regla. 1. *El valor de una fracción no se altera si tanto el numerador como el denominador se multiplican o dividen por un mismo número diferente de cero.*

Por ejemplo,
$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} \qquad \text{y} \qquad \frac{8}{20} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

De acuerdo con la regla 1, dos o más fracciones cualesquiera pueden ser expresadas con el mismo denominador; por ejemplo, $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$ y $\frac{3}{10}$ pueden ser escritas como $\frac{10}{30}, \frac{12}{30}$ y $\frac{9}{30}$ o como $\frac{20}{60}, \frac{24}{60}$ y $\frac{18}{60}$, etc., de donde $\frac{3}{10} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5}$ ya que $\frac{9}{30} < \frac{10}{30} < \frac{12}{30}$.

Al sumar y restar fracciones es necesario expresar las distintas fracciones con el mismo denominador. De los muchos denominadores que pueden ser usados, siempre existe uno menor que todos llamado *mínimo común denominador.* En el ejemplo anterior, 30 es el mínimo común denominador.

Regla 2. *La suma (o diferencia) de dos fracciones, expresadas con el mismo denominador, es una fracción cuyo denominador es el denominador común y cuyo numerador es la suma (o diferencia) de los numeradores.*

Por ejemplo,
$$\frac{3}{5}+\frac{1}{4} = \frac{12}{20}+\frac{5}{20} = \frac{12+5}{20} = \frac{17}{20}$$
y
$$\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{5}{4} = \frac{8}{12}+\frac{18}{12}-\frac{15}{12} = \frac{8+18-15}{12} = \frac{11}{12}$$

Regla 3. *El producto de dos o más fracciones es una fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores de las distintas fracciones.*

Por ejemplo,
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{10} = \frac{2\cdot5\cdot9}{3\cdot4\cdot10} = \frac{3}{4}$$

Regla 4. *El cociente de dos fracciones puede ser evaluado mediante la aplicación de la regla 1, utilizando el mínimo común denominador de las fracciones como multiplicando.*

Por ejemplo,
$$\frac{22}{7}\div\frac{12}{5} = 35\cdot\frac{22}{7}\div35\cdot\frac{12}{5} = \frac{5\cdot22}{7\cdot12} = \frac{5\cdot11}{7\cdot6} = \frac{55}{42}$$
y
$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}} = \frac{12\cdot\frac{2}{3}-12\cdot\frac{1}{2}}{12\cdot\frac{3}{4}+12\cdot\frac{1}{3}} = \frac{8-6}{9+4} = \frac{2}{13}$$

Véase el problema 2.

UNA FRACCION DECIMAL es una fracción cuyo denominador es una potencia entera de 10; por ejemplo, 6/10, 11/100 y 125/1000 son *fracciones decimales*. Estas fracciones se representan frecuentemente como 0,6, 0,11 y 0,125 respectivamente haciendo uso de la notación decimal. Para trasformar una fracción común en una fracción decimal, simplemente dividimos el numerador de la fracción común entre su denominador. Al efectuarse dicha división se pueden presentar dos posibilidades:

(i) la división resulta exacta; por ejemplo, $\frac{1}{4} = 0{,}25$ y $23/8 = 2{,}875$, es decir, son fracciones comunes que se convierten en fracciones decimales exactas.

(ii) la división no resulta exacta; por ejemplo, $1/3 = 0{,}3333\ldots$ y $2/7 = 0{,}285714285714285714\ldots$. Este es el caso de fracciones decimales periódicas. En la primera fracción, el dígito 3 se repite indefinidamente; en la segunda, el período de dígitos 285714 se repite también indefinidamente.

A los enteros y a las fracciones comunes se les conoce como *números racionales*. Los *números irracionales* son aquellos que cuando se expresan en forma decimal, ésta no puede ser exacta ni periódica, por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, π.

En el desarrollo de este libro, utilizaremos números representados en forma decimal. Los valores en la mayoría de las tablas incluidas son números con 8 dígitos después de la coma decimal, pero en forma tal que son aproximaciones obtenidas de la representación decimal completa correspondiente, "redondeada" al número requerido de cifras decimales. Por ejemplo,

(*1*) 1,0829586432 (*3*) 1,284453125
(*2*) 1,053424119375 (*4*) 1,045678375

son números que dan lugar a las siguientes cifras:

(*1'*) 1,08295864 (*3'*) 1,28445312
(*2'*) 1,05342412 (*4'*) 1,04567838

Estos resultados se obtuvieron redondeando de acuerdo con la "regla del computador" que dice así:

(*a*) Incrementar en 1 el último dígito retenido si los dígitos despreciados exceden el valor 5000...

(*b*) Dejar sin cambio el último dígito retenido si los dígitos despreciados son menores de 5000...

(*c*) Hacer par el último dígito retenido (incrementándolo en 1 cuando sea necesario), si el dígito despreciado es exactamente 5.

En (*1*) los dígitos despreciados son $32 < 50$; el último dígito retenido permanece sin cambio. En (*2*) los dígitos despreciados son $9375 > 5000$, por lo cual el último dígito retenido se incrementa en 1. En (*3*) y (*4*) el dígito despreciado es 5; en (*3*) el último dígito retenido es par y permanece sin cambio, mientras que en (*4*) el último dígito retenido es impar por lo que ha sido incrementado en 1.

Véase el problema 3.

OPERACIONES CON DECIMALES. Excepto por el cuidado que debe tenerse con la coma decimal, existe muy poca diferencia entre las operaciones con fracciones decimales y las operaciones con enteros.

Al sumar y restar decimales, deben mantenerse las comas decimales en columna.

Ejemplo 1.

(*a*) Sumar 32,5, 1,34 y 0,27.

$$\begin{array}{r} 32{,}5 \\ 1{,}34 \\ 0{,}27 \\ \hline 34{,}11 \end{array}$$

(*b*) Restar 42,63 de 128,4.

$$\begin{array}{r} 128{,}40 \\ 42{,}63 \\ \hline 85{,}77 \end{array}$$

El número de cifras decimales de un producto es igual a la suma del número de cifras decimales de los factores.

Ejemplo 2.

(*a*) $6{,}8 \times 0{,}4 = 2{,}72$ (*b*) $2{,}76 \times 0{,}3 = 0{,}828$ (*c*) $0{,}02 \times 0{,}04 = 0{,}0008$

El número de cifras decimales de un cociente es igual a la diferencia entre el número de cifras decimales del dividendo (incluyendo los ceros que se agreguen) y el número de cifras decimales del divisor.

Ejemplo 3.

(*a*) $1{,}32 \div 1{,}2 = 1{,}1$ (*b*) $14{,}1 \div 5{,}6 = 14{,}1000 \div 5{,}6 = 2{,}518$

La confusión que algunas veces surge al tratar de colocar la coma decimal en un cociente, puede ser evitada si antes de efectuar la división se multiplica tanto el dividendo como el divisor por una potencia de 10 que haga el divisor entero (regla 1 de las fracciones) y luego dividir. En esta forma, el número de decimales del cociente será igual al número de decimales del dividendo.

Ejemplo 4.

(*a*) $1{,}32 \div 1{,}2 = 13{,}2 \div 12 = 1{,}1$ (tanto el dividendo como el divisor se multiplican por 10).

(*b*) $14{,}335 \div 1{,}25 = 1433{,}5 \div 125 = 1433{,}500 \div 125 = 11{,}468$

MULTIPLICACION ABREVIADA. Con frecuencia se necesita calcular productos del tipo AB o ABC en los que A es un número con dos decimales (pesos y centavos por ejemplo) mientras que B y C son valores con ocho decimales tomados de tablas; el producto deberá ser correcto redondeado a dos cifras decimales (pesos y centavos).

Ejemplo 5.

Encontrar el producto correcto redondeado a dos decimales, de $523{,}68 \times 2{,}29724447$.

Tenemos que:

$$\begin{array}{r|l} 2{,}29724447 & \\ 523{,}68 & \\ \hline 183779 & 5576 \\ 1378346 & 682 \\ 6891733 & 41 \\ 45944889 & 4 \\ 1148622235 & \\ \hline 1203{,}020984 & 0496 \end{array}$$

El producto resultante tiene 10 dígitos a la derecha de la coma decimal y tendrá que ser redondeado a dos cifras decimales; esto es, a 1203,02. Si se utiliza una máquina calculadora, el exceso de cifras no tiene gran importancia; en caso contrario, deberá reducirse tanto como sea posible el trabajo manual efectuado. La primera pregunta que surge es: Puesto que 2,29724447 es simplemente un valor tomado de una tabla, ¿es necesario que utilicemos los 8 decimales?, por supuesto que no; sin embargo, por el momento supongamos que todos los dígitos a la derecha de la línea vertical pueden ser despreciados con seguridad. Veamos qué significa esto:

La última línea de los productos parciales de la multiplicación anterior corresponde a $5 \times 2{,}29724447$, la línea precedente corresponde a $2 \times 2{,}29724447$ con el último dígito redondeado, la anterior corresponde a $3 \times 2{,}2972444$ con el último dígito redondeado, la que sigue corresponde a $6 \times 2{,}297244$ también con el último dígito redondeado, y así sucesivamente. Empecemos nuevamente la multiplicación. En vez de tomar los dígitos 52368 del multiplicador leídos de derecha a izquierda, los tomamos ahora leídos de izquierda a derecha. En primer lugar efectuamos el producto parcial $5 \times 2{,}29724447$. En seguida calculamos $2 \times 2{,}29724447$ y redondeamos el último dígito: o sea $2 \times 7 = 14$, redondea-

```
 2,29724447
     523,68
 1148622235
   45944889
    6891733
    1378346
     183779
 1203020982
```

mos el 4 y llevando el 1 tenemos $2 \times 4 + 1 = 9$, colocamos el 9 bajo el último dígito del primer producto parcial; continuamos con $2 \times 4 = 8$ y así sucesivamente. Colocamos un punto sobre el 7 o lo tachamos para indicar que ya no se utilizará más. En seguida obtenemos el producto $3 \times 2{,}2972444$ redondeando el último dígito, es decir, $3 \times 4 = 12$; redondeando 2 y llevando 1 tenemos $3 \times 4 + 1 = 13$, colocamos 3 en la última columna y llevamos 1; continuamos con $3 \times 4 + 1 = 13$ y así sucesivamente (colocamos un punto sobre el último 4), etc. Para determinar en qué lugar debemos colocar la coma decimal en el producto final, no podemos proceder como antes sumando el número de decimales de los factores. Sin embargo, sabemos que el producto buscado se encuentra entre 2×523 y 2×524, es decir, que tiene que haber 4 dígitos a la izquierda de la coma decimal. De aquí que el producto con dos cifras decimales será 1203,02.

Véase el problema 4.

El problema de determinar el mínimo número de decimales que deben tomarse de un valor determinado para obtener una cierta precisión no es de fácil solución. Podemos ver que en el problema 4(*a*) la respuesta correcta se obtiene cuando 2,29724447 se redondea a 2,29724, esto es, a cinco decimales. Obsérvese que es precisamente el número de cifras en 52368 cuando 523,68 (pesos y centavos) se convierte a centavos. Este hecho lo consideraremos como regla en capítulos posteriores. Esto, sin embargo, no es completamente cierto, pero el error es pequeño. Puede asegurarse una precisión completa si utilizamos una cifra decimal adicional.

LA RAZON de dos cantidades expresadas en la misma unidad, es su cociente.

Ejemplo 6.

(*a*) La razón de 15 a 105 es $\dfrac{15}{105} = \dfrac{1}{7}$.

(*b*) La razón de 136 a 16 es $\dfrac{136}{16} = \dfrac{17}{2} = \dfrac{8{,}5}{1}$.

(*c*) En 1956 la utilidad neta de la compañía XYZ fue de \$45.826 siendo su activo total de \$343.695. La razón de la utilidad neta al activo total fue $\dfrac{45.826}{343.695} = \dfrac{1}{7{,}5}$.

Véase el problema 5.

UNA PROPORCION es la igualdad de dos razones tales como $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

En esta proporción a y d reciben el nombre de *extremos* mientras que b y c se conocen como *medios*. Claramente vemos que

$$ad = bc$$

entonces podemos establecer en general que, en una proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Ejemplo 7.

Resolver para x: $\dfrac{x}{26} = \dfrac{108}{702}$

Igualando el producto de los extremos $(x \cdot 702)$ al producto de los medios $(26 \cdot 108)$, tenemos $702x = 26 \cdot 108$, de donde $x = \dfrac{26 \cdot 108}{702} = 4$.

Ejemplo 8.

Una inversión de \$4000 en una empresa le produce a M un rendimiento de \$240. (*a*) Encontrar el rendimiento que obtendría N con una inversión de \$7000 en la misma empresa. (*b*) ¿Cuánto debe invertir P para obtener un rendimiento de \$600?

(*a*) Representemos por x el rendimiento requerido. Igualando las razones $\dfrac{\text{rendimiento}}{\text{inversión}}$ de N y M tenemos: $\dfrac{x}{7000} = \dfrac{240}{4000} = \dfrac{3}{50}$, por lo que

$$50x = 3 \cdot 7000 \qquad \text{y} \qquad x = 3 \cdot 140 = \$420$$

(*b*) Representemos por y la inversión requerida. Procediendo como en (*a*) tenemos:

$$\frac{600}{y} = \frac{240}{4000} = \frac{3}{50}$$

de donde $3y = 600 \cdot 50$ y $y = 200 \cdot 50 = \$10.000$.

DEPRECIACION es la pérdida de valor de un activo físico (edificios, maquinaria, etc.), como consecuencia del uso. Para prevenir la necesidad de remplazo de un determinado activo al fin de su vida útil, cada año se traspasa una parte de las utilidades de una empresa a un fondo especial llamado *fondo para depreciación.* A los depósitos anuales en el fondo para depreciación se les conoce como *cargos por depreciación.* En un momento determinado, a la diferencia entre el costo original del activo y el importe del fondo para depreciación se le conoce como *valor en libros.* El valor en libros de un activo al fin de su vida útil debe ser su *valor de salvamento.*

En el método más simple para depreciar activos, conocido como *método de promedios* o *método lineal,* se efectúan depósitos anuales iguales en el fondo para depreciación, durante toda la vida útil del activo.

Ejemplo 9.

Se estima que una máquina cuyo costo es de \$4000, tendrá una vida útil de 6 años y al fin de dicho período un valor de salvamento de \$400. (*a*) Encontrar la depreciación promedio anual. (*b*) Elaborar una tabla de depreciación en donde se muestre el valor en libros cada año.

(*a*) Depreciación total = costo − valor de salvamento

$$= 4000 - 400 = \$3600$$

$$\text{Depreciación promedio anual} = \frac{3600}{6} = \$600.$$

(*b*) Puesto que el cargo por depreciación anual es de \$600, el fondo para depreciación se incrementa en esa cantidad cada año, mientras que el valor en libros decrece anualmente en esa misma cantidad. Esto se muestra en la siguiente tabla:

Tiempo Edad (años)	Cargo por depreciación	Importe del fondo para depreciación	Valor en libros al final del año
0	0	0	4000
1	600	600	3400
2	600	1200	2800
3	600	1800	2200
4	600	2400	1600
5	600	3000	1000
6	600	3600	400

Cuando se requiere depreciar maquinaria, existe un método, igual de simple pero más real, que consiste en calcular el cargo anual por depreciación con base en el número de horas que una máquina estuvo en operación, o en el número de artículos producidos en el año.

Ejemplo 10.

A una máquina cuyo costo fue de $2250 se le ha estimado un valor de salvamento de $450 y na vida probable de 60.000 horas de operación. (*a*) Encontrar el cargo por depreciación por hora de operación. (*b*) Preparar una tabla en la que se muestre el valor en libros para cada uno de los cuatro primeros años de vida de la máquina durante los cuales las horas de operación fueron: 4000, 3800, 4500, 4750.

(*a*) Depreciación total = costo − valor de salvamento

$$= 2250 - 450 = \$1800$$

Cargo por depreciación por hora de operación $= \dfrac{1800}{60.000} = \$0{,}03.$

(*b*)

Años	Horas de operación	Cargo por depreciación	Importe del fondo para depreciación	Valor en libros al final del año
0	0	0	0	2250
1	4000	120	120	2130
2	3800	114	234	2016
3	4500	135	369	1881
4	4750	142,50	511,50	1738,50

Ejemplo 11.

A una máquina cuyo costo fue de $2250 se le ha estimado un valor de salvamento de $450 y se calcula que puede producir 120.000 unidades. (*a*) Encontrar el cargo por depreciación por unidad. (*b*) Preparar una tabla en la que se muestre el valor en libros para cada uno de los primeros cuatro años de vida de la máquina, durante los cuales las unidades producidas fueron: 16.000, 19.000, 21.000, 18.000.

(*a*) Depreciación total = costo — valor de salvamento

$$= 2250 - 450 = \$1800$$

Cargo por depreciación por unidad $= \dfrac{1800}{120.000} = \$0{,}015.$

(*b*)

Años	Unidades Producidas	Cargo por depreciación	Importe del fondo para depreciación	Valor en libros al final del año
0		0	0	2250
1	16.000	240	240	2010
2	19.000	285	525	1725
3	21.000	315	840	1410
4	18.000	270	1110	1140

POR CIENTO (Porcentaje). El término *por ciento*, representado con el símbolo %, significa centésimos; o sea que, 25% es simplemente otra forma de representar 25/100, 0,25 ó 1/4.

Ejemplo 12.

(*a*) Si decimos: *M* carga el 15% por el cobro de ciertas deudas.
Significa: *M* carga $15 por cada $100 que él cobra.

(*b*) Si decimos: Una cierta inversión produce 6% anual.
Significa: La inversion produce $6 anuales por cada $100 invertidos.

Cualquier número expresado en forma decimal, puede ser escrito como por ciento colocando simplemente el punto decimal dos lugares a la derecha y agregando el símbolo %. Por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = 0{,}50 = 50\%; \quad \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%; \quad \frac{11}{4} = 2{,}75 = 275\%;$$

$$3 = 3{,}00 = 300\%; \quad \frac{9}{8} = 1{,}125 = 112{,}5\%$$

Inversamente, para expresar numéricamente un por ciento dado, suprimimos el símbolo % y colocamos el punto decimal dos lugares a la izquierda. Por ejemplo,

$$75\% = 0{,}75 = 3/4; \quad 8\% = 0{,}08; \quad 5\tfrac{1}{4}\% = 0{,}0525;$$

$$154\% = 1{,}54; \quad 1000\% = 10$$

Ejemplo 13.

Podemos resolver ahora el ejemplo 8, como sigue:

Sabemos que: $\dfrac{\text{rendimiento}}{\text{inversión}} = \dfrac{240}{4000} = 0{,}06 = 6\%$ esto es, que la inversión produce un rendimiento de 6%.

(*a*) $\dfrac{\text{rendimiento}}{\text{inversión}} = \dfrac{x}{7000} = 0{,}06$; entonces, $x = 7000(0{,}06) = \$420.$

(*b*) $\dfrac{\text{rendimiento}}{\text{inversión}} = \dfrac{600}{y} = 0{,}06$; entonces, $0{,}06y = 600$ y $y = \dfrac{600}{0{,}06} = \$10.000.$

Nótese que mientras se habla de por cientos, siempre se opera con el equivalente en forma decimal.

Véanse los problemas 6-11.

DESCUENTO COMERCIAL es una rebaja sobre el precio de lista de un artículo. Dicha rebaja se da siempre como por ciento del precio de lista.

Ejemplo 14.

El precio de lista de una máquina lavadora es $275 y el descuento comercial es de 40%. ¿Cuál es el valor de factura (precio de lista o descuento comercial)?

Primera solución:

El descuento comercial es 275(0,40) = $110.
El valor de factura es 275 — 110 = $165.

Segunda solución:

Un descuento del 40% sobre *A* deja un saldo de (1 —0,40)*A* = 0,60*A*, es decir 60% de *A*. El valor de factura es 275(0,60) = $165.

Si se conceden dos o más descuentos comerciales, las deducciones correspondientes deben ser hechas sucesivamente.

Ejemplo 15.

Si la compañía mayorista XYZ concede descuentos de 20%, 10% y 5%, encontrar el costo (valor de factura) para la tienda de comestibles ABC de un pedido marcado en $3250.

Primera solución:

Precio de lista	=	3250		
Primer descuento	=	3250(0,20)	=	650
Primer saldo	=	3250 − 650	=	2600
Segundo descuento	=	2600(0,10)	=	260
Segundo saldo	=	2600 − 260	=	2340
Tercer descuento	=	2340(0,05)	=	117
Tercer saldo	=	2340 − 117	=	$2223
	=	valor de factura		

Segunda solución:

Precio de lista	=	3250		
Primer saldo	=	3250(0,80)	=	2600
Segundo saldo	=	2600(0,90)	=	2340
Tercer saldo	=	2340(0,95)	=	$2223
	=	valor de factura		

o sea, Valor de factura = 3250(0,80)(0,90)(0,95) = $2223

Véase el problema 12.

DESCUENTO POR PAGO DE CONTADO es una reducción sobre el valor de factura, por pago dentro de un período determinado.

Ejemplo 16.

Si la compañía mayorista XYZ del ejemplo 15, concede un 2% de descuento por pago dentro de los diez días siguientes a la fecha de factura, encontrar la cantidad pagada por la tienda de comestibles ABC por su pedido, si el pago se hace dentro del período especificado.

Valor de factura	=	2223		
Descuento por pago de contado	=	2223(0,02)	=	44,46
Suma pagada	=	2223 − 44,46	=	$2178,54

Véase el problema 13.

PRECIO AL POR MENOR. A la diferencia entre el costo de un artículo para un comerciante y el precio en que es marcado para su venta, se le conoce como margen de utilidad, o utilidad bruta. Es costumbre calcular dicho margen como un cierto porcentaje sobre el precio de venta.

Ejemplo 17.

¿A qué precio debe marcar un comerciante un artículo cuyo costo fue de $10,60, sabiendo que su margen de utilidad es 40%?

Representemos por V el precio de venta; puesto que

Precio de venta — utilidad bruta = costo,

$$V - 0{,}40\,V = 10{,}60$$
$$0{,}60\,V = 10{,}60$$
$$V = \$17{,}67$$

Véanse los problemas 14-15.

Problemas resueltos

1. Efectuar las operaciones indicadas:

(*a*) $7 + (-3) + 2 - (-4) = 7 - 3 + 2 + 4 = 10$
(*b*) $5 - (-2) + 0 - 4 = 5 + 2 - 4 = 3$
(*c*) $7(-2)(5) = -(7 \cdot 2 \cdot 5) = -70$
(*d*) $6(-3)(4)(-2) = +(6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2) = 144$
(*e*) $12 \div (-4) = -(12 \div 4) = -3$
(*f*) $-20 \div (-5) = +(20 \div 5) = 4$

2. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

(*a*) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} + \frac{6}{12} = \frac{9+8+6}{12} = \frac{23}{12}$

(*b*) $1 + \frac{5}{8} - \frac{7}{24} = \frac{24+15-7}{24} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$

(*c*) $12\tfrac{2}{5} - 7\tfrac{1}{3} + 5\tfrac{5}{6} = \frac{62}{5} - \frac{22}{3} + \frac{35}{6} = \frac{372-220+175}{30} = \frac{327}{30} = \frac{109}{10}$

(*d*) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{7} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{5}{7}$

(*e*) $2\tfrac{1}{2} \cdot 3\tfrac{1}{5} \cdot 5\tfrac{3}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{23}{4} = 2 \cdot 23 = 46$

(*f*) $\frac{2}{5} \div \frac{3}{10} = \left(10 \cdot \frac{2}{5}\right) \div \left(10 \cdot \frac{3}{10}\right) = 4 \div 3 = \frac{4}{3}$

(*g*) $\frac{5}{18} \div \left(-\frac{5}{3}\right) = 18 \cdot \frac{5}{18} \div 18\left(-\frac{5}{3}\right) = 5 \div (-30) = 1 \div (-6) = -\frac{1}{6}$

(*h*) $\frac{1/5 - 2/3}{3/10 - 5/6} = \frac{30(1/5) - 30(2/3)}{30(3/10) - 30(5/6)} = \frac{6-20}{9-25} = \frac{-14}{-16} = \frac{7}{8}$

3. Escribir el equivalente en forma decimal, aproximado a dos cifras: (*a*) 17/8, (*b*) 175/8, (*c*) 3245/152.

Efectuamos la división con 3 cifras decimales y redondeamos el resultado a 2 cifras decimales.

(*a*) $\frac{17}{8}$ = 2,125 exactamente, o 2,12

(*b*) $\frac{175}{8}$ = 21,875 exactamente, o 21,88

(*c*) $\frac{3245}{152}$ = 21,348... o 21,35

4. Encontrar el resultado correcto con dos decimales:

(*a*) 523,68 × 2,29724

$$\begin{array}{r} 2{,}29724 \\ 523{,}68 \\ \hline 1148620 \\ 45945 \\ 6892 \\ 1378 \\ 183 \\ \hline 1203018 \end{array}$$

Resp. 1203,02

(*b*) 487,36 × 0,01487

$$\begin{array}{r} 487{,}36 \\ 0{,}01487 \\ \hline 48736 \\ 19494 \\ 3898 \\ 341 \\ \hline 72469 \end{array}$$

Resp. 7,25

5. Una zapatería, cuya existencia promedio de mercancía es de $30.000 obtuvo una utilidad de $36.000 sobre una venta total de $120.000 en 1959. Encontrar (*a*) la razón del total de ventas al inventario promedio, (*b*) la razón de la utilidad a la venta total.

(*a*) $\frac{\text{venta total}}{\text{inventario promedio}} = \frac{120.000}{30.000} = 4$; la razón es de 4 a 1.

(*b*) $\frac{\text{utilidad}}{\text{ventas}} = \frac{36.000}{120.000} = \frac{3}{10} = \frac{1}{3\frac{1}{3}}$; la razón es de 1 a $3\tfrac{1}{3}$.

6. Encontrar:

(*a*)	4% de 725	725(0,04) = 29
(*b*)	175% de 800	800(1,75) = 1400
(*c*)	$2\tfrac{1}{2}$% de $35.640,80	35.640,80(0,025) = $891,02
(*d*)	$\tfrac{3}{4}$% de $12.000	12.000(0,0075) = $90,00

7. Qué por ciento de:

(*a*) 40 es 20 $\quad \dfrac{20}{40} = \dfrac{1}{2} = 50\%$

(*b*) 31 es 620 $\quad \dfrac{620}{31} = 20 = 2000\%$

(*c*) \$1500 es \$75 $\quad \dfrac{75}{1500} = 0{,}05 = 5\%$

(*d*) \$2500 es \$137,50 $\quad \dfrac{137{,}50}{2500} = 0{,}055 = 5\frac{1}{2}\%$

8. Hallar x si el 7% de x es 5,25.

Tenemos que $0{,}07x = 5{,}25$ por tanto $x = \dfrac{5{,}25}{0{,}07} = 75$.

9. (*a*) ¿De qué número es 20 el 25%? $\quad \dfrac{20}{0{,}25} = 80$

(*b*) ¿De qué cantidad es \$42,00 el $3\frac{1}{2}\%$? $\quad \dfrac{42}{0{,}035} = \$1200$

(*c*) ¿De qué cantidad es \$531,55 el 125%? $\quad \dfrac{531{,}55}{1{,}25} = \$425{,}24$

10. Sobre una inversión de \$2500, *M* obtiene una utilidad de \$131,25. ¿Qué porcentaje de la inversión representa dicha utilidad?

El problema es: ¿Qué porcentaje de \$2500 es \$131,25?

$$\frac{131{,}25}{2500} = 0{,}0525 = 5\tfrac{1}{4}\%$$

11. Un abogado recupera el 90% de una demanda de \$300,00 y cobra por concepto de servicios el 15% de la suma recuperada. ¿Qué cantidad recibirá su cliente?

El abogado recupera $300(0{,}90) = \$270$.
Sus honorarios son $(270)(0{,}15) = \$40{,}50$.
El cliente recibe $270 - 40{,}50 = \$229{,}50$.

12. La compañía M & Z adquirió 10 radios marcados en \$37,50, con descuento del 20% y 12 radios marcados en \$60,00 con descuentos del 25% y del 10%. Encontrar el valor de factura del pedido.

Costo de los 10 radios $= 375(1 - 0{,}20) = 375(0{,}80) = 300$.
Costo de los 12 radios $= 720(1 - 0{,}25)(1 - 0{,}10) = 720(0{,}75)(0{,}90) = 486$.
Valor de factura $= 300 + 486 = \$786$.

13. J. L. García compró 4 televisores marcados en \$400, con descuentos del 15% y del 10%. La factura tiene fecha del 15 de marzo, y se ofreció un descuento de 3% por pago dentro de los 10 días siguientes. ¿Qué cantidad pagó García el 23 de marzo?

Valor de factura $= 1600(1 - 0{,}15)(1 - 0{,}10) = 1600(0{,}85)(0{,}90) = \$1224$.
Cantidad pagada $= 1224(1 - 0{,}03) = 1224(0{,}97) = \$1187{,}28$.

14. ¿Cuál es el precio de venta de un millar de hojas de papel si su costo es de \$2,70 y tienen un margen de utilidad del $33\frac{1}{3}$?

Llamemos V al precio de venta. Puesto que:

$$\text{Precio de venta} = \text{costo} + \text{utilidad}$$
$$V = 2{,}70 + \tfrac{1}{3}V$$
$$V - \tfrac{1}{3}V = \tfrac{2}{3}V = 2{,}70 \quad \text{y} \quad V = \tfrac{3}{2}(2{,}70) = \$4{,}05$$

15. Demostrar que una utilidad del 40% sobre el precio de venta V de un artículo, es equivalente a una utilidad del $66\frac{2}{3}\%$ sobre su costo C.

$$\text{Costo} = \text{precio de venta} - \text{utilidad}$$
$$C = V - 0{,}40V.$$

O sea que $C = 0{,}60V = \frac{3}{5}V$ o $V = \frac{5}{3}C = C + \frac{2}{3}C$.
Por tanto, la utilidad es $\frac{2}{3}C$, es decir, $66\frac{2}{3}\%$ del costo.

Problemas propuestos

16. Efectuar las operaciones indicadas.

(*a*) $5 + (-3)$ (*b*) $6 - (-2)$ (*c*) $-8 + (-6)$ (*d*) $-10 - (-4)$
(*e*) $7 - (-2) + 0 + (-5)$ (*f*) $9(-12)$ (*g*) $5(0)$ (*h*) $(-8)(-10)$
(*i*) $(-8)(-10)(-5)$ (*j*) $15 \div (-5)$ (*k*) $-30 \div (-3)$ (*l*) $-80 \div (5)$

Resp. (*a*) 2, (*b*) 8, (*c*) −14, (*d*) −6, (*e*) 4, (*f*) −108, (*g*) 0, (*h*) 80, (*i*) −400, (*j*) −3, (*k*) 10, (*l*) −16

17. A cada uno de los siguientes números

−9, −6, −3, 0, 3, 6, 9, 12, 15

(*a*) sumarles 5 (*b*) sumarles −4 (*c*) restarles 6
(*d*) restarles −2 (*e*) multiplicarlos por 6 (*f*) multiplicarlos por −5
(*g*) dividirlos entre 3 (*h*) dividirlos entre −1 (*i*) dividirlos entre −3

18. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar al máximo:

(*a*) $\dfrac{3}{8} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{7}{12}$ (*b*) $2 - \dfrac{3}{4} - \dfrac{7}{8}$ (*c*) $9\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4} - 3\frac{1}{2}$
(*d*) $\dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{6}{7}$ (*e*) $\dfrac{22}{3} \cdot \dfrac{5}{33} \cdot \dfrac{18}{25}$ (*f*) $4\frac{1}{4} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{5}$
(*g*) $\dfrac{4}{9} \div \dfrac{8}{27}$ (*h*) $\dfrac{2}{5} \div \dfrac{4}{15}$ (*i*) $\dfrac{3/4 - 2}{1/5 + 3}$

Resp. (*a*) 13/8, (*b*) 3/8, (*c*) 3, (*d*) 15/14, (*e*) 4/5, (*f*) $55\frac{1}{4}$, (*g*) 3/2, (*h*) 3/2, (*i*) −25/64

19. Redondear cada una de las cantidades siguientes a 2 cifras decimales:
(*a*) 11,3825, (*b*) 9,6472, (*c*) 185,245, (*d*) 22,255, (*e*) 8,295
Resp. (*a*) 11,38, (*b*) 9,65, (*c*) 185,25, (*d*) 22,26, (*e*) 8,30

20. Escribir en forma decimal, aproximando a dos decimales.

(a) $\frac{91}{16}$, (b) $\frac{11}{6}$, (c) $\frac{35}{8}$, (d) $\frac{185}{7}$

Resp. (a) 5,69, (b) 1,83, (c) 4,38, (d) 26,43

21. Calcular los siguientes productos con aproximación a dos decimales.

(a) $122{,}58 \times 15{,}26536$ (c) $1125 \times 1{,}795856$

(b) $3250 \times 0{,}082685$ (d) $1775 \times 0{,}116029$

Resp. (a) 1871,23, (b) 268,73, (c) 2020,34, (d) 205,95

22. Encontrar el cargo por depreciación anual por el método lineal y preparar una tabla que muestre el cambio anual del valor en libros de:

(a) Una máquina cuyo costo fue de $1750 y se depreció en 5 años, alcanzando un valor de salvamento de $150.

(b) Una máquina cuyo costo fue de $65.000 y se depreció en 10 años, alcanzando un valor de salvamento de $5000.

Resp. (a) $320, (b) $6000

23. Una máquina con costo de $3000 tiene un promedio de vida estimado en 20.000 horas de operación, y un valor de salvamento de $600. Las horas de uso durante los primeros 5 años fueron: 1800, 2200, 2000, 2500, 2400. Preparar una tabla en la que se muestre el valor en libros al fin de cada uno de los 5 años.

24. Se estima que una máquina con costo de $3000 es capaz de producir 125.000 unidades antes de su remplazo, y que después tendrá un valor de salvamento de $500. Las unidades producidas durante cada uno de los 5 primeros años fueron: 15.000, 12.500, 10.000, 14.000, 17.500; preparar una tabla en la que se muestre el valor en libros al fin de cada uno de los 5 años.

25. Expresar cada una de las siguientes cantidades en porcentajes:

(a) 0,05 (e) 0,76375 (i) 1/5 (m) 8

(b) 0,08 (f) 0,54545 (j) 1/6 (n) 1,25

(c) 0,055 (g) 1,2575 (k) 5/8 (o) 7,2

(d) 0,082 (h) 2,3784 (l) 7/8 (p) 17,5

Resp (a) 5%, (b) 8%, (c) $5\frac{1}{2}$%, (d) $8\frac{1}{5}$%, (e) $76\frac{3}{8}$%, (f) 54,545%, (g) $125\frac{3}{4}$%, (h) 237,84%, (i) 20%, (j) $16\frac{2}{3}$%, (k) $62\frac{1}{2}$%, (l) $87\frac{1}{2}$%, (m) 800%, (n) 125%, (o) 720%, (p) 1750%

26. Expresar cada uno de los siguientes porcentajes como fracciones decimales:

(a) 4% (e) 0,5% (i) $1\frac{3}{4}$%

(b) 10% (f) 0,75% (j) $2\frac{1}{8}$%

(c) 62% (g) $\frac{1}{4}$% (k) $87\frac{1}{2}$%

(d) 85% (h) $\frac{3}{8}$% (l) 127,5%

Resp. (a) 0,04, (b) 0,1, (c) 0,62, (d) 0,85, (e) 0,005, (f) 0,0075, (g) 0,0025, (h) 0,00375, (i) 0,0175, (j) 0,02125, (k) 0,875, (l) 1,275

27. Encontrar los siguientes porcentajes.

(a) 3% de 200 (d) 18% de $4000 (g) 2% de 7% de $5000

(b) 5% de 800 (e) $4\frac{1}{2}$% de $12.500 (h) 3% de 5% de $12.000

(c) 12% de $3000 (f) $33\frac{1}{3}$% de $21.720 (i) 10% de 20% de $250.000

Resp. (a) 6, (b) 40, (c) $360, (d) $720, (e) $562,50, (f) $7240, (g) $7, (h) $18, (i) $5000

28. ¿Qué porcentaje de:

(a) 20 es 10? (d) $4800 es $168?

(b) 10 es 20? (e) $1664 es $35,36?

(c) $1200 es $108? (f) 0,28 es 0,0056?

Resp (a) 50%, (b) 200%, (c) 9%, (d) $3\frac{1}{2}$%, (e) $2\frac{1}{8}$%, (f) 2%

29. (a) ¿De qué número es 9 el 20%? (d) ¿De qué cantidad es $2000 el $6\frac{1}{4}$%?

(b) ¿De qué número es 9 el $12\frac{1}{2}$%? (e) ¿De qué cantidad es $183,75 el $3\frac{1}{2}$%?

(c) ¿De qué cantidad es $400 el 2%? (f) ¿De qué cantidad es $275,10 el $5\frac{1}{4}$%?

Resp. (a) 45, (b) 72, (c) $20.000, (d) $32.000, (e) $5250, (f) $5240

30. En cierto estado se ha implantado un impuesto del 4% sobre el importe de las ventas. Encontrar el impuesto sobre un automóvil facturado en $3500.

Resp. $140

31. La compañía XYZ anuncia 10% de descuento en toda su mercancía. Si *M* compra una aspiradora eléctrica marcada con $125, ¿cuánto tiene que pagar por ella? ¿Cuánto tendrá que pagar si existe un impuesto de 4%?

Resp. $112,50 y $117

32. Sobre la venta de cierto artículo existe un impuesto de 10% y una vez que este impuesto ha sido cargado se aplica otro impuesto del 4% sobre el total. Si un artículo está marcado en $250, ¿cuánto tendrá el comprador que pagar por él?

Resp. $286

33. Un comerciante compra un artículo en $20 y lo vende en $32,50. Expresar la utilidad como porcentaje del precio de costo y del precio de venta.

Resp. $62\frac{1}{2}$% y $38\frac{6}{13}$%

34. Si X es 25% menor que Y, ¿en qué porcentaje de X, excede Y a X?

Resp. $33\frac{1}{3}$%

35. Una persona gasta $147 en aceite con precio de $0,14 por galón. Encontrar el costo de la misma cantidad de aceite a $0,16 por galón.

Resp. $168

36. Encontrar el valor de factura, dado:

(a) precio de lista = $750 con descuento del 40%

(b) precio de lista = $750 con descuentos del 30% y 10%

(c) precio de lista = $750 con descuentos del 20%, 10% y 10%

(d) precio de lista = $750 con descuentos del 15%, 15%, 5% y 5%

Resp. (a) $450, (b) $472,50, (c) $486, (d) $489,05

37. ¿Qué descuento único es equivalente a los descuentos sucesivos:

(a) del problema 36(b)? (b) del problema 36(c)? (c) del problema 36(d)?

Resp. (a) 37%, (b) 35,2%, (c) 34,793%

38. Dos firmas competidoras tienen el mismo precio de lista para un artículo. Una firma ofrece descuentos del 25% y 15%, la otra ofrece descuentos del 20%, 10% y 10%. ¿Qué descuentos son más ventajosos para el comprador?

39. Una factura de $3000, fechada el 1o. de junio, estipula lo siguiente: Un descuento del 5% por pago en 10 días o un descuento del 2% por pago en 30 días. Encontrar la suma pagada si la liquidación fue hecha (a) el 10 de junio, (b) el 29 de junio.

Resp. (a) $2850, (b) $2940

40. Encontrar la cantidad pagada si cada uno de los siguientes conceptos son pagados dentro del período establecido para descuentos por pronto pago:

	Precio de lista	Descuento comercial	Descuento por pago de contado
(a)	$2500	25%	3% por pago en 10 días
(b)	$5000	20%, 10%	2% por pago en 10 días
(c)	$3750	25%, 10%, 5%	5% por pago en 30 días
(d)	$7500	30%, 5%, 5%	2% por pago en 15 días

Resp. (a) $1818,75, (b) $3528, (c) $2284,46, (d) $4643,36

41. Una tienda de ropa adquiere trajes en $60 y los marca para su venta en una cantidad tal, que le produzca un margen de utilidad del 40% sobre el precio de venta. Encontrar el precio de venta.

Resp. $100.

Capítulo 2

Exponentes y logaritmos

EXPONENTES. Cuando $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ se abrevia como a^6, a se conoce como *base* y 6 como *exponente*. Un exponente es, por tanto, un entero positivo escrito en la parte superior derecha de la base, el cual indica el número de veces que la base aparece como factor.

Ejemplo 1.

(*a*) $a^2 = a \cdot a$

(*b*) $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$

(*c*) $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

(*d*) $243 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$

(*e*) $432 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^3$

(*f*) $2000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5^3$

(*g*) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$

(*h*) $(81)^2 = 81 \cdot 81 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^4$

(*i*) $(1+i)^3 = (1+i)(1+i)(1+i)$

(*j*) $(1+i)^n = (1+i)(1+i) \cdots$ hasta n factores

LEYES DE EXPONENTES. Si m y n son enteros positivos y $a \neq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= (a \cdot a \ldots \text{ hasta } m \text{ factores})(a \cdot a \ldots \text{ hasta } n \text{ factores}) \\ &= (a \cdot a, \ldots \text{ hasta } m+n \text{ factores}) = a^{m+n} \end{aligned} \tag{1}$$

Por tanto, $a^7 \cdot a^3 = a^{7+3} = a^{10}$, $b^2 \cdot b^6 = b^{2+6} = b^8$, $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$.

$$\begin{aligned} \frac{a^m}{a^n} &= \frac{(a \cdot a \ldots \text{ hasta } m \text{ factores})}{(a \cdot a \ldots \text{ hasta } n \text{ factores})} = (a \cdot a \ldots \text{ hasta } m-n \text{ factores}) \\ &= a^{m-n}, \quad \text{cuando } m > n \end{aligned} \tag{2}$$

Por tanto, $a^7/a^3 = a^{7-3} = a^4$, $b^8/b^3 = b^{8-3} = b^5$, $2^{10}/2^6 = 2^{10-6} = 2^4 = 16$.

$$\begin{aligned} \frac{a^m}{a^n} &= \frac{(a \cdot a \ldots \text{ hasta } m \text{ factores})}{(a \cdot a \ldots \text{ hasta } n \text{ factores})} = \frac{1}{(a \cdot a \ldots \text{hasta } n-m \text{ factores})} \\ &= \frac{1}{a^{n-m}}, \quad \text{cuando } m < n \end{aligned} \tag{3}$$

Por tanto, $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^{5-3}} = \frac{1}{a^2}$, $\frac{b^4}{b^8} = \frac{1}{b^{8-4}} = \frac{1}{b^4}$, $\frac{3^5}{3^7} = \frac{1}{3^{7-5}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= a^m \cdot a^m \ldots \text{ hasta } n \text{ factores} = a^{m+m+\cdots \text{ hasta } n \text{ términos}} \\ &= a^{mn} \end{aligned} \tag{4}$$

Por tanto, $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$, $(b^3)^4 = b^{3 \cdot 4} = b^{12}$, $(3^2)^2 = 3^{2 \cdot 2} = 3^4 = 81$.

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^n &= (a \cdot a \ldots \text{ hasta } n \text{ factores})(b \cdot b \ldots \text{ hasta } n \text{ factores}) \\ &= a^n b^n \end{aligned} \tag{5}$$

Por tanto, $(ab)^2 = a^2b^2$, $(xy)^4 = x^4y^4$, $(2x^3)^5 = 2^5x^{15} = 32x^{15}$, $(x^2y^3)^5 = x^{10}y^{15}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right) \ldots \text{ hasta } n \text{ factores} \\ &= \frac{a \cdot a \ldots \text{ hasta } n \text{ factores}}{b \cdot b \ldots \text{ hasta } n \text{ factores}} = \frac{a^n}{b^n} \end{aligned} \tag{6}$$

Por tanto, $\left(\frac{a}{b}\right)^5 = \frac{a^5}{b^5}$, $\left(\frac{x^2}{y}\right)^4 = \frac{(x^2)^4}{y^4} = \frac{x^8}{y^4}$, $\left(\frac{81}{32}\right)^3 = \left(\frac{3^4}{2^5}\right)^3 = \frac{3^{12}}{2^{15}}$.

Véase el problema 1.

EXPONENTE CERO, NEGATIVO Y FRACCIONARIO. Para incluir en la noción de exponente cualquier número racional (por ejemplo, cero, enteros positivos y negativos y fracciones comunes) son necesarias las siguientes definiciones:

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0 \tag{7}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0 \text{ siendo } n \text{ un entero positivo} \tag{8}$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \quad \text{siendo } n \text{ un entero positivo} \tag{9}$$

Puede demostrarse que las leyes (*1*) y (*6*) dadas para los exponentes, se cumplen si la condición "m y n son enteros positivos" se cambia por "m y n son números racionales". Obsérvese, sin embargo, que el exponente en la expresión $a^{1/n}$, por ejemplo, nada tiene que ver con el número de veces que la base aparece como factor.

Ejemplo 2.

(*a*) $1 = \frac{2^5}{2^5} = 2^{5-5} = 2^0$

(*b*) $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

(*c*) $\frac{1}{3^{-4}} = 3^4 = 81$

(*d*) $\frac{a^5}{a^{-3}} = a^5 \cdot a^3 = a^8$

(*e*) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-4} = \frac{a^{-8}}{b^{-12}} = \frac{b^{12}}{a^8}$

(*f*) $(25)^{1/2} = \sqrt{25} = 5$

(*g*) $(8)^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$

(*h*) $(16)^{-3/2} = (4^2)^{-3/2} = 4^{-3} = 1/4^3 = 1/64$

(*i*) $\left(\frac{a^4}{b^{-6}}\right)^{-1/2} = \frac{a^{-2}}{b^3} = \frac{1}{a^2b^3}$

(*j*) $(1{,}02)^5(1{,}02)^{-3/2} = (1{,}02)^{7/2}$

Véase el problema 2.

TEOREMA DEL BINOMIO. Bajo ciertas restricciones establecidas más adelante tenemos que

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots \tag{10}$$

Es posible obtener cualquier término de la expresión anterior mediante la aplicación de las siguientes propiedades:

(i) El exponente de a en el primer término es n, en el segundo es $n-1$, y decrece en 1 en cada término sucesivo.

(ii) La suma de los exponentes de a y b, en cualquier término es n.

(iii) El coeficiente del primer término es 1, el del segundo término es n, el coeficiente de cualquier término posterior es igual al coeficiente del término precedente, multiplicado por el exponente de a en ese mismo término, y dividido entre el exponente de b aumentado en 1, de ese término. En consecuencia, el quinto término en (*10*) es

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}a^{n-4}b^4$$

Siendo n un entero positivo, la igualdad dada en (*10*) se cumple para cualquier valor de a y b, produciéndose $(n + 1)$ términos.

Ejemplo 3.

Desarrollar $(2x + 3y)^5$ y simplificar.

$$\begin{aligned}(2x+3y)^5 &= (2x)^5 + 5(2x)^4(3y) + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(2x)^3(3y)^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}(2x)^2(3y)^3 \\ &\quad + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(2x)(3y)^4 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(3y)^5 \\ &= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5\end{aligned}$$

Sea n cualquier número racional que no sea entero positivo; (*10*) se cumple siempre y cuando el valor numérico de a sea mayor que el valor numérico de b, produciéndose un número ilimitado de términos.

Ejemplo 4.

Desarrollar $(9x^2 + 4y)^{1/2}$ a 5 términos y simplificar cada término.

$$\begin{aligned}(9x^2+4y)^{1/2} &= (9x^2)^{1/2} + \tfrac{1}{2}(9x^2)^{-1/2}(4y) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{1\cdot 2}(9x^2)^{-3/2}(4y)^2 \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2\cdot 3}(9x^2)^{-5/2}(4y)^3 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(9x^2)^{-7/2}(4y)^4 + \cdots \\ &= 3x + \frac{1}{2}\frac{4y}{3x} - \frac{1}{8}\frac{16y^2}{27x^3} + \frac{1}{16}\frac{64y^3}{243x^5} - \frac{5}{128}\frac{256y^4}{2187x^7} + \cdots \\ &= 3x + \frac{2y}{3x} - \frac{2y^2}{27x^3} + \frac{4y^3}{243x^5} - \frac{10y^4}{2187x^7} + \cdots\end{aligned}$$

EL TEOREMA DEL BINOMIO tiene aplicación en el cálculo de potencias de $(1 + i)$, donde i es una tasa de interés, con resultado aproximado a un número dado de decimales.

Para aproximar $(1 + i)^n$ a r cifras decimales deben seguirse los siguientes pasos:

(*a*) Escribir los primeros términos del desarrollo.

(*b*) Evaluar cada término con $(r + 1)$ cifras decimales.

(*c*) Si es necesario, seguir agregando términos en (*a*) hasta finalizar el desarrollo o hasta alcanzar un término con $(r + 1)$ ceros a la derecha del punto decimal.

(*d*) Sumar todos los términos evaluados y redondear a r cifras decimales.

Ejemplo 5.

Encontrar el valor de $(1{,}03)^8$ con 6 cifras decimales.

$$\begin{aligned}(1{,}03)^8 &= (1+0{,}03)^8 = 1^8 + 8(1)^7(0{,}03) + 28(1)^6(0{,}03)^2 + 56(1)^5(0{,}03)^3 \\ &\quad + 70(1)^4(0{,}03)^4 + 56(1)^3(0{,}03)^5 + 28(1)^2(0{,}03)^6 + \cdots \\ &= 1 + 0{,}24 + 0{,}0252 + 0{,}001512 + 0{,}0000567 + 0{,}0000014 \\ &\quad + (0{,}000000020412) + \ldots \\ &= 1{,}266770\end{aligned}$$

Véanse los problemas 3-4.

LOGARITMOS. El logaritmo en base b de un número positivo N ($\log_b N$), es el exponente L tal que $b^L = N$. Por ejemplo,

$$\log_2 32 = 5, \text{ ya que, } 2^5 = 32 \text{ y } \log_5 125 = 3, \text{ ya que, } 5^3 = 125.$$

Véanse los problemas 5-6.

Para nuestros propósitos, en adelante utilizaremos la base 10 escribiendo $\log N$ en vez de $\log_{10} N$. Por definición tenemos

$$\begin{aligned}\log 1000 &= 3 \quad \text{ya que} \quad 10^3 = 1000 \\ \log 100 &= 2 \quad \text{ya que} \quad 10^2 = 100 \\ \log 10 &= 1 \quad \text{ya que} \quad 10^1 = 10 \\ \log 1 &= 0 \quad \text{ya que} \quad 10^0 = 1 \\ \log 0{,}1 &= -1 \quad \text{ya que} \quad 10^{-1} = 0{,}1 \\ \log 0{,}01 &= -2 \quad \text{ya que} \quad 10^{-2} = 0{,}01 \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

Sean $A = 10^a$, $B = 10^b$, y $C = 10^c$ tales que $\log A = a$, $\log B = b$, y $\log C = c$.

Puesto que
$$A\cdot B\cdot C = 10^a\cdot 10^b\cdot 10^c = 10^{a+b+c},$$
$$A/B = 10^a/10^b = 10^{a-b}, \quad \text{y} \quad A^n = (10^a)^n = 10^{na},$$

se deduce que

$$\begin{aligned}\log A\cdot B\cdot C &= a + b + c = \log A + \log B + \log C \\ \log A/B &= a - b = \log A - \log B \\ \log A^n &= na = n \log A\end{aligned}$$

Con lo anterior hemos mostrado que:

I. *El logaritmo del producto de dos o más números positivos es igual a la suma de los logaritmos de los números.*

II. *El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.*

III. *El logaritmo de una potencia de un número positivo es igual al producto del logaritmo del número multiplicado por el exponente de la potencia.*

Ejemplo 6.

Conocidos $\log 2 = 0{,}301030$ y $\log 3 = 0{,}477121$; entonces

(*a*) $\log 6 = \log(2\cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0{,}301030 + 0{,}477121 = 0{,}778151$

(*b*) $\log 60 = \log(6\cdot 10) = \log 6 + \log 10 = 0{,}778151 + 1{,}000000 = 1{,}778151$

(*c*) $\log 600 = \log(6\cdot 10^2) = \log 6 + \log 10^2 = 0{,}778151 + 2{,}000000 = 2{,}778151$

(*d*) $\log 0{,}06 = \log\frac{6}{100} = \log 6 - \log 10^2 = 0{,}778151 - 2{,}000000$

Es corriente escribir este resultado como $\overline{2},778151$, pero nosotros los escribiremos como $8{,}778151 - 10$.

(*e*) $\log 0{,}0036 = \log(0{,}06)^2 = 2\log 0{,}06 = 2[8{,}778151 - 10]$
$= 17{,}556302 - 20 = 7{,}556302 - 10$

(*f*) $\log\sqrt[5]{0{,}06} = \log(0{,}06)^{1/5} = \frac{1}{5}\log 0{,}06 = \frac{1}{5}[8{,}778151 - 10]$
$= \frac{1}{5}[48{,}778151 - 50] = 9{,}755630 - 10$

CARACTERISTICA Y MANTISA. El logaritmo (en base 10) de un número positivo consiste de dos partes: (i) una parte entera llamada *característica* y (ii) una parte decimal llamada *mantisa* Del ejemplo 6, podemos concluir que la mantisa está determinada por la serie de dígitos del número sin importar la posición de la coma decimal, mientras que la característica está determinada únicamente por la posición de la coma decimal.

Para números mayores que 1, la característica es igual al número de dígitos a la izquierda de la coma decimal menos una unidad. [Véanse los ejemplos 6(a), (b), (c)]. En números comprendidos entre 0 y 1, la característica se determina contando el número de ceros entre la coma decimal y la primera cifra significativa, restando este número a 9 y agregando al final 10 [véanse los ejemplos 6 (d), (e)].

Véase además el problema 7.

La mantisa, por lo general, es una fracción decimal infinita redondeada a un número dado de cifras decimales.

TABLA DE MANTISAS. La tabla I proporciona la mantisa con seis cifras decimales de cualquier número con cuatro o menos dígitos. La coma decimal antes de cada cantidad ha sido omitida en la impresión. Por el momento, ignoraremos la tabla de partes proporcionales.

Ejemplo 7.

(a) Para encontrar la mantisa del log 3178, se localizan en la columna N los primeros tres dígitos, 317. En seguida, en la misma línea de 317, se localiza en la columna del 8 la cantidad 502154, es decir

$$\begin{array}{ccc} N & & 8 \\ \downarrow & & \\ 317 & \longrightarrow & 502154 \end{array}$$

La mantisa requerida es 0,502154. Por tanto,

$$\log 31{,}78 = 1{,}502154 \qquad \log 0{,}03178 = 8{,}502154 - 10$$
$$\log 317800 = 5{,}502154 \qquad \log 0{,}003178 = 7{,}502154 - 10$$

(b) Para encontrar la mantisa del log 25, notamos que es la misma mantisa del log 250 y del log 2500. En el renglón de 250 bajo el 0, localizamos 0,397940. Por consiguiente,

$$\log 2{,}5 = 0{,}397940 \qquad \log 0{,}25 = 9{,}397940 - 10$$
$$\log 250 = 2{,}397940 \qquad \log 25000 = 4{,}397940$$

(c) Para encontrar la mantisa del log 58164, nótese que la mantisa de 58160, es 0,764624 y la mantisa de 58170 es 0,764699. La diferencia de 58164 con 58160 es 4/10 de la diferencia entre 58170 con 58160; podemos encontrar la mantisa del log 58164 si suponemos que la diferencia con la mantisa de log 58160 es 4/10 de la diferencia entre las mantisas de log 58170 con log 58160, es decir,

$$0{,}764624 + \tfrac{4}{10}(0{,}764699 - 0{,}764624) = 0{,}764624 + \tfrac{4}{10}(0{,}000075)$$
$$= 0{,}764624 + 0{,}000030 = 0{,}764654$$

El procedimiento anterior recibe el nombre de *interpolación*. Será utilizado frecuentemente con la tabla I y con algunas otras tablas de este libro. La interpolación puede ilustrarse como sigue. (Utilizamos las cantidades tal como aparecen en la tabla I, colocándose la coma decimal después que la mantisa ha sido encontrada.)

$$\begin{array}{c} \textbf{Número} \\ 10\left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 58160 \\ 58164 \end{array}\right] 4 \\ 58170 \end{array}\right. \end{array} \qquad \begin{array}{c} \textbf{Mantisa} \\ 75\left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 764624 \\ m \end{array}\right] x \\ 764699 \end{array}\right. \end{array}$$

En esta representación, el número fuera del paréntesis corresponde a la diferencia entre las cantidades indicadas; por tanto, $x = m - 764624$, de donde:

$$\frac{x}{75} = \frac{4}{10}, \quad x = \frac{4}{10}(75) = 30, \quad \text{y}$$
$$m = 764624 + x = 764624 + 30 = 764654$$

La mantisa requerida es 0,764654.

(d) Para encontrar la mantisa del log 873462, es suficiente encontrar la mantisa del log 87346; para encontrar la mantisa del log 873469, se busca la mantisa de 87347. Generalizando, para encontrar la mantisa del logaritmo de un número con seis o más dígitos, se redondea dicho número a cinco dígitos.

Véanse los problemas 8-9.

TABLA DE PARTES PROPORCIONALES. El proceso de interpolación descrito anteriormente consiste en parte en:

(i) encontrar la diferencia, llamada *diferencia tabular*, entre dos cantidades consecutivas de la tabla I. (En el ejemplo 7(c), la diferencia tabular es 75.)

(ii) encontrar un cierto número de décimos de dicha diferencia tabular. (En el ejemplo 7(c), necesitamos 4/10 de la diferencia tabular.)

En la tabla I, el promedio de las diferencias tabulares de las cantidades de cualquier renglón, está dado en el mismo renglón bajo "Dif". Puesto que el uso del promedio de las diferencias tabulares en vez de las diferencias tabulares exactas no altera en forma apreciable nuestros cálculos, emplearemos el promedio de las diferencias tabulares.

Ejemplo 8.

Supóngase que se desea la mantisa del log 22967. Bajo el número 6, en el renglón correspondiente a 229, se localiza 360972 y en Dif, la diferencia tabular 189. Necesitamos 7/10 de 189. En la misma página, en la tabla de partes proporcionales se busca 189 en Dif y, en el mismo renglón en la columna correspondiente al número 7 se localiza 132,3; es decir, que $\frac{7}{10}$ de 189 son 132,3. Sumamos a 360972 la corrección 132, y entonces la mantisa requerida es 0,361104.

En cierto tipo de cálculos es necesario lograr una precisión mayor que la que se obtiene interpolando en la tabla I (véase el ejemplo 13). Para este propósito, se incluye la tabla II, la cual proporciona mantisas hasta con siete cifras decimales para números desde 10.000 hasta 10.999.

Ejemplo 9.

De la tabla II obtenemos sin necesidad de interpolación, 0,0009977 como mantisa de 10023. Redondeando a seis decimales, el resultado es similar al que se obtiene haciendo uso de la tabla I, o sea 0,000998.

Véase el problema 10.

ANTILOGARITMOS. Sea $\log N = L$; a N se le conoce como el *antilogaritmo* de L.

Ejemplo 10.

(a) Sabiendo que $\log N = 2{,}571010$, encontrar N.

Como la característica es 2, sabemos que tiene 3 dígitos a la izquierda de la coma decimal; la mantisa es 0,571010. Empezamos por analizar la mantisa. En la tabla I, localizamos 571010 en la columna del 4 en el renglón correspondiente a 372. Los dígitos de N son 3724; por tanto N es igual a 372,4.

(b) Sabiendo que $\log N = 1{,}732752$, encontrar N.

En este caso, 732752, no aparece en la tabla I, pero vemos que se encuentra entre

732715 correspondiente a 54040

y

732796 correspondiente a 54050

Es decir, que la diferencia con 732715 equivale a $\dfrac{732752 - 732715}{732796 - 732715} = \dfrac{37}{81}$ de la diferencia entre 732796 y 732715. Podemos suponer que la diferencia entre N y 54040, también equivale a 37/81 de la diferencia entre 54050 y 54040, es decir,

$$54040 + \frac{37}{81}(10) \;=\; 54040 + 5 \;=\; 54045$$

Puesto que la característica es 1, habrá dos cifras a la izquierda de la coma decimal, o sea que $N = 54{,}045$.

En este caso puede ser de gran ayuda la tabla de partes proporcionales. Utilizándola, procederíamos como sigue:

(i) Se localizan el renglón y la columna de la mantisa más próxima a la dada obteniéndose en este caso 5404.

(ii) Se determina la diferencia entre la mantisa dada y la inmediata anterior (en este caso 732752 — 732715 = 37) y el promedio de diferencia tabular (que es 81). En la tabla de partes proporcionales localizamos 81 en Dif y en el mismo renglón buscamos la cantidad más cercana a 37; en este caso encontramos 40,5 en la columna del 5. Agregamos 5 a la derecha de los números ya encontrados para obtener 54045.

(iii) Se coloca la coma decimal de acuerdo a la regla establecida para las características, obteniéndose $N = 54{,}045$.

(*c*) Dado $\log N = 3{,}790100$, encontrar N.

La cantidad inmediata anterior a 790100 en la tabla I es 790074, correspondiente a 6167. La diferencia es 790100 — 790074 = 26; la diferencia tabular es 70. Localizando 70 en Dif en la tabla de partes proporcionales, encontramos que 28,0 en la columna del 4 es la cantidad más próxima a 26. En esta forma obtenemos 61674. La característica es 3; por tanto, habrá 4 dígitos a la izquierda de la coma decimal y, en consecuencia, $N = 6167{,}4$.

(*d*) Dado $\log N = 5{,}073464$, encontrar N.

La menor mantisa más próxima a 073464, en la tabla I, es 073352 correspondiente a 1184. La diferencia es 073464 — 073352 = 112 y la diferencia tabular 366. Localizando 366 en Dif, en la tabla de partes proporcionales, encontramos 109,8 en la columna del 3 como el más próximo a 112. Los dígitos requeridos para N, son 11843. Debe haber 6 dígitos antes de la coma decimal. Aumentando 11843 en una cifra tenemos que $N = 118430$.

Nota. Si N representa pesos y centavos, el resultado obtenido \$118.430 estaría aproximado a las decenas de pesos.

(*e*) Dado $\log N = 7{,}359900 - 10$, encontrar N.

La menor mantisa más próxima a 359900 es 359835, correspondiente a 2290. La diferencia es 359900 — 359835 = 65 y la diferencia tabular 189. Localizando 189 en la tabla de partes proporcionales encontramos 56,7 en la columna del 3 como la cantidad más próxima a 65. Los dígitos de N serán 22903. Debe haber dos ceros inmediatamente después de la coma decimal; por tanto $N = 0{,}0022903$.

(*f*) Dado $\log N = 0{,}039144$, encontrar N.

Cuando sea suficiente una precisión de 5 dígitos, podemos conocer dichos dígitos directamente de la tabla II. Encontramos que 0391364 correspondiente a 10943, es la mantisa más próxima a 0391440, por lo cual $N = 1{,}0943$.

Podemos obtener N con 6 dígitos por interpolación. Nuestra diferencia es 0391440 — 0391364 = 76, siendo la diferencia tabular 397. Ya que 760 ÷ 397, es aproximadamente 2, tenemos que $N = 1{,}09432$.

CALCULOS CON LOGARITMOS. Los logaritmos son un instrumento eficaz en la elaboración de ciertos cálculos, debido al tiempo que se ahorra. Para aprovecharlos al máximo, es conveniente definir un procedimiento de cálculo antes de recurrir a las tablas.

Ejemplo 11.

Utilizando logaritmos, encontrar $N = 2875 \times 0{,}08462$.

$$\log N = \log 2875 + \log 0{,}08462$$

Procedimiento de cálculo

$$\begin{aligned} \log 2875 &= 3, \\ +\log 0{,}08462 &= \underline{8 \qquad\qquad -10} \\ \log N &= \\ N &= \end{aligned}$$

Cálculo completo

$$\begin{aligned} \log 2875 &= 3{,}458638 \\ +\log 0{,}08462 &= \underline{8{,}927473 - 10} \\ \log N &= 2{,}386111 \\ N &= 243{,}28 \end{aligned}$$

(*Nota.* 12,386111 — 10 = 2,386111)

Ejemplo 12.

Utilizando logaritmos, encontrar $N = \dfrac{34{,}726}{8{,}156}$.

$$\log N = \log 34{,}726 - \log 8{,}156$$

Procedimiento de cálculo

$$\begin{aligned} \log 34{,}726 &= 1, \\ -\log 8{,}156 &= \underline{0, \qquad\qquad} \\ \log N &= \\ N &= \end{aligned}$$

Cálculo completo

$$\begin{aligned} \log 34{,}726 &= 1{,}540655 \\ -\log 8{,}156 &= \underline{0{,}911477} \\ \log N &= 0{,}629178 \\ N &= 4{,}2577 \end{aligned}$$

Ejemplo 13.

Utilizando logaritmos, encontrar $N = (1{,}0225)^{10}$.

$$\begin{aligned} \log N &= 10 \log 1{,}0225 \\ \log 1{,}0225 &= 0{,}0096633 \quad \text{(tabla II)} \\ \log N &= 10 \log 1{,}0225 = 0{,}096633 \\ N &= 1{,}2492 \end{aligned}$$

COLOGARITMOS. Definimos como cologaritmo de N (*colog N*), a

$$\log\frac{1}{N} \;=\; -\log N \;=\; 0 - \log N \;=\; (10{,}000000 - 10) - \log N$$

Ejemplo 14.

(*a*) Si $\log N = 2{,}463876$, $\operatorname{colog} N = \left.\begin{array}{r} 10{,}000000 - 10 \\ -\;\; 2{,}463876 \end{array}\right\} = 7{,}536124 - 10$

(*b*) Si $\log N = 7{,}224465 - 10$, $\operatorname{colog} N = \left.\begin{array}{r} 10{,}000000 - 10 \\ -\;\; 7{,}224465 - 10 \end{array}\right\} = 2{,}775535$

Se debe tener la precaución de no usar cologaritmos siempre que se encuentre con $-\log N$. La decisión de utilizarlos o no, dependerá del procedimiento de cálculo resultante.

Ejemplo 15.

Encontrar $N = \dfrac{34{,}726}{8{,}156}$.

$$\log N = \log 34{,}726 - \log 8{,}156 = \log 34{,}726 + \operatorname{colog} 8{,}156$$

$$\begin{aligned} \log 34{,}726 &= 1{,}540655 \\ +\operatorname{colog} 8{,}156 &= \underline{9{,}088523 - 10} \\ \log N &= 0{,}629178 \\ N &= 4{,}2577 \end{aligned}$$

Al comparar con el ejemplo 12, vemos claramente que no se gana nada, en este caso, utilizando cologaritmos.

Ejemplo 16.

Encontrar $N = \dfrac{3{,}278}{90{,}26 \times 0{,}04247}$

$$\begin{aligned} \log N &= \log 3{,}278 - \log 90{,}26 - \log 0{,}04247 \\ &= \log 3{,}278 + \operatorname{colog} 90{,}26 + \operatorname{colog} 0{,}04247 \end{aligned}$$

Utilizando logaritmos

$$\begin{aligned} \log 3{,}278 &= 10{,}515609 - 10 \\ -\log 90{,}26 &= \underline{1{,}955495} \\ & \quad 18{,}560114 - 20 \\ -\log 0{,}04247 &= \underline{8{,}628082 - 10} \\ \log N &= 9{,}932032 - 10 \\ N &= 0{,}85513 \end{aligned}$$

Utilizando cologaritmos

$$\begin{aligned} \log 3{,}278 &= 0{,}515609 \\ +\operatorname{colog} 90{,}26 &= 8{,}044505 - 10 \\ +\operatorname{colog} 0{,}04247 &= \underline{1{,}371918} \\ \log N &= 9{,}932032 - 10 \\ N &= 0{,}85513 \end{aligned}$$

Claramente, en este caso, es más conveniente utilizar cologaritmos.

Ejemplo 17.
Encontrar $N = (1{,}0116)^{-15} = \dfrac{1}{(1{,}0116)^{15}}$.

Utilizando logaritmos

Sea $M = (1{,}0116)^{15}$

$$\begin{aligned} \log M &= 15 \log 1{,}0116 \\ &= 15(0{,}0050088) \\ &= 0{,}075132 \end{aligned}$$

Ya que $N = 1/M$

$$\begin{aligned} \log N &= \log 1 - \log M \\ \log 1 &= 10{,}000000 - 10 \\ -\log M &= \underline{0{,}075132} \\ \log N &= 9{,}924868 - 10 \\ N &= 0{,}84114 \end{aligned}$$

Utilizando cologaritmos

$$\begin{aligned} \log N &= -15 \log 1{,}0116 \\ &= 15 \operatorname{colog} 1{,}0116 \\ 15 \log 1{,}0116 &= 0{,}075132 \\ \log N = 15 \operatorname{colog} 1{,}0116 &= 9{,}924868 - 10 \\ N &= 0{,}84114 \end{aligned}$$

En este caso es ventajoso utilizar cologaritmos, sin embargo, véase además el problema 11(c).

Véanse los problemas 11-12.

Problemas resueltos

1. (a) $a^6 \cdot a^4 = a^{6+4} = a^{10}$

(b) $a^6 \cdot a^4 \cdot a^3 = a^{6+4+3} = a^{13}$

(c) $a \cdot a^2 \cdot a^3 = a^{1+2+3} = a^6$

(d) $\dfrac{a^3 \cdot a^5}{a^6} = \dfrac{a^{3+5}}{a^6} = a^{3+5-6} = a^2$

(e) $\dfrac{a^4 \cdot a^3}{a^{10}} = \dfrac{a^{4+3}}{a^{10}} = \dfrac{a^7}{a^{10}} = \dfrac{1}{a^{10-7}} = \dfrac{1}{a^3}$

(f) $\dfrac{a^8 \cdot a^3}{a^6 \cdot a^5} = \dfrac{a^{8+3}}{a^{6+5}} = \dfrac{a^{11}}{a^{11}} = 1$

(g) $(a^6)^2 = a^{6 \cdot 2} = a^{12}$

(h) $(a^2 \cdot a^4)^3 = (a^{2+4})^3 = (a^6)^3 = a^{6 \cdot 3} = a^{18}$

(i) $\left(\dfrac{a^5 \cdot a^2}{a^{10}}\right)^4 = \left(\dfrac{a^7}{a^{10}}\right)^4 = \left(\dfrac{1}{a^3}\right)^4 = \dfrac{1}{a^{12}}$

(j) $x^3y^2 \cdot x^2 \cdot x^4y^8 = x^{3+2+4}y^{2+8} = x^9y^{10}$

(k) $\dfrac{x^5y^4 \cdot x^3y^2}{x^4y^8} = \dfrac{x^8y^6}{x^4y^8} = \dfrac{x^4}{y^2}$

(l) $\left(\dfrac{81 \cdot 32}{216}\right)^3 = \left(\dfrac{3^4 \cdot 2^5}{2^3 \cdot 3^3}\right)^3 = (3 \cdot 2^2)^3 = 3^3 \cdot 2^6$

2. (a) $a^{1/3} \cdot a^{1/3} = a^{1/3+1/3} = a^{2/3}$

(b) $a^5 \cdot a^{-2} = a^{5-2} = a^3$

(c) $\dfrac{a^{9/2}}{a^{7/2}} = a^{9/2-7/2} = a^{2/2} = a$

(d) $\dfrac{a^{2/3}}{a^{8/3}} = \dfrac{1}{a^{8/3-2/3}} = \dfrac{1}{a^{6/3}} = \dfrac{1}{a^2}$

(e) $(a^{1/2})^6 = a^{1/2 \cdot 6} = a^3$

(f) $(a^{1/2})^{-6} = a^{1/2(-6)} = a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$

(g) $(4x^6)^{5/2} = (2^2x^6)^{5/2} = (2^2)^{5/2}(x^6)^{5/2} = 2^5x^{15} = 32x^{15}$

(h) $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^3 = \dfrac{a^{2 \cdot 3}}{b^{3 \cdot 3}} = \dfrac{a^6}{b^9}$

(i) $\left(\dfrac{a^4}{b^3}\right)^5\left(\dfrac{b^2}{a^3}\right)^4 = \dfrac{a^{20}b^8}{b^{15}a^{12}} = \dfrac{a^8}{b^7}$

(j) $\dfrac{10^{0,348}}{10^{-0,652}} = 10^{0,348+0,652} = 10$

(k) $(36^{1/2})^3 = 6^3 = 216$

(l) $(25)^{-9/2}(25^4) = 25^{-1/2} = \dfrac{1}{25^{1/2}} = \dfrac{1}{5}$

(m) $(158{,}5)^0 = 1;\ \left(\dfrac{1}{26{,}4}\right)^0 = 1$

(n) $\left(\dfrac{2a}{3b^2}\right)^{-3} = \dfrac{2^{-3}a^{-3}}{3^{-3}b^{-6}} = \dfrac{3^3b^6}{2^3a^3} = \dfrac{27b^6}{8a^3}$

3. Calcular $(1{,}04)^{-6}$ con 4 cifras decimales.

$$\begin{aligned} (1{,}04)^{-6} &= (1+0{,}04)^{-6} \\ &= 1^{-6} + (-6)(1)^{-7}(0.04) + \frac{(-6)(-7)}{1 \cdot 2}(1)^{-8}(0{,}04)^2 \\ &\quad + \frac{(-6)(-7)(-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(1)^{-9}(0{,}04)^3 + \frac{(-6)(-7)(-8)(-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(1)^{-10}(0{,}04)^4 \\ &\quad + \frac{(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}(1)^{-11}(0{,}04)^5 + \cdots \\ &= 1 - 6(0{,}04) + 21(0{,}04)^2 - 56(0{,}04)^3 + 126(0{,}04)^4 - 252(0{,}04)^5 + \cdots \\ &= 1 - 6(0{,}04) + 21(0{,}0016) - 56(0{,}000064) \\ &\quad + 126(0{,}00000256) - 252(0{,}0000001024) + \cdots \\ &= 1 - 0{,}24 + 0.0336 - 0{,}00358 + 0{,}00032 - 0{,}00003 + \cdots \\ &= 0{,}7903 \end{aligned}$$

El séptimo término tiene cinco ceros después del punto decimal y no se muestra aquí.

4. Calcular $(1{,}02)^{-3/2}$ con 6 cifras decimales.

$$\begin{aligned} (1{,}02)^{-3/2} &= 1^{-3/2} + (-3/2)(1)^{-5/2}(0\ 02) + \frac{(-3/2)(-5/2)}{1 \cdot 2}(1)^{-7/2}(0{,}02)^2 \\ &\quad + \frac{(-3/2)(-5/2)(-7/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(1)^{-9/2}(0{,}02)^3 \\ &\quad + \frac{(-3/2)(-5/2)(-7/2)(-9/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(1)^{-11/2}(0{,}02)^4 + \cdots \\ &= 1 - \frac{3}{2}(0{,}02) + \frac{15}{8}(0{,}02)^2 - \frac{35}{16}(0{,}02)^3 + \frac{315}{128}(0{,}02)^4 - \cdots \\ &= 1 - 0{,}03 + 0{,}00075 - 0{,}0000175 + 0{,}0000004 - \cdots \\ &= 0{,}970733 \end{aligned}$$

5. (*a*) Puesto que $4^5 = 1024$, $\log_4 1024 = 5$.
(*b*) Puesto que $7^3 = 343$, $\log_7 343 = 3$.
(*c*) Puesto que $36^{1/2} = 6$, $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$.
(*d*) Puesto que $125^{2/3} = 25$, $\log_{125} 25 = \frac{2}{3}$.
(*e*) Puesto que $5^{-2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$, $\log_5 0{,}04 = -2$.

6. De las siguientes equivalencias

$3^1 = 3$	$\log_3 3 = 1$
$3^2 = 9$	$\log_3 9 = 2$
$3^3 = 27$	$\log_3 27 = 3$
$3^4 = 81$	$\log_3 81 = 4$
$3^5 = 243$	$\log_3 243 = 5$
$3^6 = 729$	$\log_3 729 = 6$
$3^7 = 2187$	$\log_3 2187 = 7$
$3^8 = 6561$	$\log_3 6561 = 8$
$3^9 = 19683$	$\log_3 19683 = 9$

se deduce que

$$81 \cdot 243 = 3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} \quad \text{y} \quad \log_3 (81 \cdot 243) = 4 + 5 = \log_3 81 + \log_3 243$$

$$\frac{6561}{729} = \frac{3^8}{3^6} = 3^{8-6} \quad \text{y} \quad \log_3 \frac{6561}{729} = 8 - 6 = \log_3 6561 - \log_3 729$$

$$(729)^{1/2} = (3^6)^{1/2} = 3^{1/2 \cdot 6} \quad \text{y} \quad \log_3 (729)^{1/2} = \tfrac{1}{2} \cdot 6 = \tfrac{1}{2} \log_3 729$$

7. Utilizando las siguientes reglas para las características:
(i) Si $A > 1$, la característica del log A es igual al número de dígitos situados a la izquierda de la coma decimal de A menos 1.
(ii) Si $0 < A < 1$, la característica del log A se determina restando de 9 el número de ceros situados inmediatamente después de la coma decimal de A y agregando a continuación -10.

la característica del log de

(*a*) 234 es 2
(*b*) 2,34 es 0
(*c*) 4569 es 3
(*d*) 45690 es 4
(*e*) 0,2004 es 9 -10
(*f*) 0,2043 es 9 -10
(*g*) 0,0243 es 8 -10
(*h*) 0,002103 es 7 -10
(*i*) 0,00002 es 5 -10
(*j*) 1,00002 es 0

8. Encontrar la mantisa del logaritmo de:
(*a*) 2345, (*b*) 1,2, (*c*) 61775, (*d*) 100,23, (*e*) 2,3446, (*f*) 0,98792

Para encontrar las mantisas no tomaremos en cuenta las comas decimales de los números.

(*a*) En la columna encabezada por *N*, en la tabla I, localizamos los tres primeros dígitos 234; en el renglón correspondiente localizamos la cifra 370143, en la columna del 5. (*Nota.* El asterisco antes de 0143 indica que los dos primeros dígitos (no escritos) son 37 en lugar de 36.) La mantisa es 0,370143.

(*b*) La mantisa de log 1,2 es la misma de log 1200. En el renglón de 120 y en la columna encabezada por 0, localizamos la mantisa 0,079181.

(*c*) En el renglón de 617 se localiza 790778 en la columna encabezada por 7, y 790848 bajo la columna encabezada por 8. Esquemáticamente tenemos:

Número	Mantisa
$10\left[\begin{array}{l} 5\left[\begin{array}{l} 61770 \\ 61775 \end{array}\right. \\ 61780 \end{array}\right.$	$70\left[\begin{array}{l} x\left[\begin{array}{l} 790778 \\ m \end{array}\right. \\ 790848 \end{array}\right.$

Entonces,

$$\frac{x}{70} = \frac{5}{10}, \quad x = \frac{5}{10}(70) = 35, \quad m = 790778 + 35 = 790813$$

La mantisa es 0,790813.

(*d*)

$$10\left[\begin{array}{l} 3\left[\begin{array}{l} 10020 \\ 10023 \end{array}\right. \\ 10030 \end{array}\right. \qquad 433\left[\begin{array}{l} x\left[\begin{array}{l} 000868 \\ m \end{array}\right. \\ 001301 \end{array}\right.$$

$$x = \tfrac{3}{10}(433) = 129{,}9, \quad m = 000868 + 130 = 000998$$

La mantisa es 0,000998. Puede ser determinada directamente en la tabla II.

(*e*)

$$10\left[\begin{array}{l} 6\left[\begin{array}{l} 23440 \\ 23446 \end{array}\right. \\ 23450 \end{array}\right. \qquad 185\left[\begin{array}{l} x\left[\begin{array}{l} 369958 \\ m \end{array}\right. \\ 370143 \end{array}\right.$$

$$x = \tfrac{6}{10}(185) = 111, \quad m = 369958 + 111 = 370069$$

La mantisa es 0,370069.

(*f*)

$$10\left[\begin{array}{l} 2\left[\begin{array}{l} 98790 \\ 98792 \end{array}\right. \\ 98800 \end{array}\right. \qquad 44\left[\begin{array}{l} x\left[\begin{array}{l} 994713 \\ m \end{array}\right. \\ 994757 \end{array}\right.$$

$$x = \tfrac{2}{10}(44) = 8{,}8, \quad m = 994713 + 9 = 994722$$

La mantisa es 0,994722.

9. Del problema 8,

$\log 2345 = 3{,}370143$	$\log 1{,}2 = 0{,}079181$
$\log 61775 = 4{,}790813$	$\log 2{,}3446 = 0{,}370069$
$\log 100{,}23 = 2{,}000998$	$\log 0{,}98792 = 9{,}994722 - 10$

10. Utilizando la tabla de partes proporcionales, encontrar:
(*a*) log 37,483, (*b*) log 0,00086437, (*c*) log 2573,8, (*d*) log 0,055692

(*a*) La característica es 1. La mantisa correspondiente a 3748 es 573800 y la diferencia tabular es 116 (localizada en el mismo renglón a la derecha bajo Dif). En la tabla de partes proporcionales localizamos 116 bajo Dif y en el renglón correspondiente encontramos 34,8 en la columna encabezada por 3. Sumando la corrección tenemos

$$573800 + 34{,}8 = 5738348 \quad \text{ó} \quad 573835 \text{ redondeando a 6 dígitos}$$

La mantisa es 0,573835 y log 37,483 = 1,573835.

(*b*) La característica es 6 − 10. Para la mantisa necesitamos

$$936665 + 0{,}7(50) = 936665 + 35{,}0 = 936700$$

Por tanto, $\log 0{,}00086437 = 6{,}936700 - 10$.

(*c*) La característica es 3. Para la mantisa necesitamos

$$410440 + 0{,}8(169) = 410440 + 135{,}2 = 410575$$

Por tanto, $\log 2573{,}8 = 3{,}410575$.

(*d*) La característica es 8 − 10. Para la mantisa necesitamos

$$745777 + 0{,}2(78) = 745777 + 15{,}6 = 745793$$

Por tanto, $\log 0{,}055692 = 8{,}745793 - 10$.

11. Encontrar:

(*a*) $N = \dfrac{35{,}124 \times 0{,}08762}{0{,}0054328}$ (*d*) $j = 4[(1{,}014)^{1/4} - 1]$

(*b*) $N = 248{,}55(1{,}032)^{22}$ (*e*) $S = \dfrac{(1{,}0135)^{20} - 1}{0{,}0135}$

(*c*) $N = 32000(1{,}0025)^{-48}$ (*f*) $A = \dfrac{1 - (1{,}0245)^{-32}}{0{,}0245}$

(*a*)

$$\begin{aligned} \log 35{,}124 &= 1{,}545605 \\ +\log 0{,}08762 &= 8{,}942603 - 10 \\ +\operatorname{colog} 0{,}0054328 &= 2{,}264976 \\ \hline \log N &= 2{,}753184 \\ N &= 566{,}48 \end{aligned}$$

(*b*)

$$\begin{aligned} \log 248{,}55 &= 2{,}395414 \\ +\,22\log 1{,}032 &= 0{,}300953 \qquad \text{(tabla II)} \\ \hline \log N &= 2{,}696367 \\ N &= 497{,}01 \end{aligned}$$

(*c*)

$$\begin{aligned} \log 32000 &= 4{,}505150 \\ -\,48\log 1{,}0025 &= 0{,}052051 \qquad \text{(tabla II)} \\ \hline \log N &= 4{,}453099 \\ N &= 28386 \end{aligned}$$

(*d*) Primero encontramos $N = (1{,}014)^{1/4}$.

$$\begin{aligned} \log N &= \tfrac{1}{4}\log 1{,}014 = 0{,}001510 \\ N &= 1{,}0035 \\ j &= 4[(1{,}014)^{1/4} - 1] = 4(1{,}0035 - 1) = 0{,}014 \end{aligned}$$

(*e*) Primero encontramos $N = (1{,}0135)^{20}$.

$$\begin{aligned} \log N &= 20\log 1{,}0135 = 0{,}116476 \\ N &= 1{,}3076 \end{aligned}$$

$$S = \frac{1{,}3076 - 1}{0{,}0135} = \frac{0{,}3076}{0{,}0135}$$

$$\begin{aligned} \log 0{,}3076 &= 9{,}487986 - 10 \\ -\log 0{,}0135 &= 8{,}130334 - 10 \\ \hline \log S &= 1{,}357652 \\ S &= 22{,}785 \end{aligned}$$

(*f*) Primero encontramos $N = 1{,}0245^{-32}$.

$$\begin{aligned} \log N &= 32\operatorname{colog} 1{,}0245 = 9{,}663616 - 10 \qquad \text{(tabla II)} \\ N &= 0{,}46091 \end{aligned}$$

De donde

$$A = \frac{1 - 0{,}46091}{0{,}0245} = \frac{0{,}53909}{0{,}0245}$$

$$\begin{aligned} \log 0{,}53909 &= 9{,}731662 - 10 \\ -\log 0{,}0245 &= 8{,}389166 - 10 \\ \hline \log A &= 1{,}342496 \\ A &= 22{,}004 \end{aligned}$$

12. (*a*) Encontrar *n*, si $(1{,}036)^n = 2{,}154$

$$n\log 1{,}036 = \log 2{,}154$$

$$n = \frac{\log 2{,}154}{\log 1{,}036} = \frac{0{,}333246}{0{,}015360}$$

$$\log n = \log 0{,}333246 - \log 0{,}015360$$

$$\begin{aligned} \log 0{,}33325 &= 9{,}522770 - 10 \\ -\log 0{,}01536 &= 8{,}186391 - 10 \\ \hline \log n &= 1{,}336379 \\ n &= 21{,}696 \end{aligned}$$

(*b*) Encontrar *n*, si $5225(1{,}0255)^{-n} = 3750$

$$\log 5225 - n\log 1{,}0255 = \log 3750$$

$$n = \frac{\log 5225 - \log 3750}{\log 1{,}0255} = \frac{3{,}718086 - 3{,}574031}{0{,}010936} = \frac{0{,}144055}{0{,}010936}$$

$$\begin{aligned} \log 0{,}14406 &= 9{,}158543 - 10 \\ -\log 0{,}010936 &= 8{,}038858 - 10 \\ \hline \log n &= 1{,}119685 \\ n &= 13{,}173 \end{aligned}$$

(*c*) Encontrar *n*, si $525\dfrac{(1{,}048)^n - 1}{(1{,}048)^{1/4} - 1} = 3125$,

Primero, se encuentra $N = (1{,}048)^{1/4}$: $\log N = \frac{1}{4}\log 1{,}048 = 0{,}005090$ y $N = 1{,}0118$.

Ahora tenemos que encontrar *n* sabiendo que:

$$525\frac{(1{,}048)^n - 1}{0{,}0118} = 3125 \quad \text{o} \quad (1{,}048)^n - 1 = \frac{3125 \times 0{,}0118}{525}$$

$$\log[(1{,}048)^n - 1] = \log 3125 + \log 0{,}0118 + \operatorname{colog} 525$$

$$\begin{aligned} \log 3125 &= 3{,}494850 \\ \log 0{,}0118 &= 8{,}071882 - 10 \\ \operatorname{colog} 525 &= 7{,}279841 - 10 \\ \hline \log[(1{,}048)^n - 1] &= 8{,}846573 - 10 \\ (1{,}048)^n - 1 &= 0{,}070238 \\ (1{,}048)^n &= 1{,}070238 \\ n\log 1{,}048 &= \log 1{,}0702 \end{aligned}$$

$$n = \frac{\log 1{,}0702}{\log 1{,}048} = \frac{0{,}029465}{0{,}020361}$$

$$\log n = \log 0{,}029465 - \log 0{,}020361$$

$$\begin{aligned} \log 0{,}029465 &= 8{,}469307 - 10 \\ -\log 0{,}020361 &= 8{,}308799 - 10 \\ \hline \log n &= 0{,}160508 \\ n &= 1{,}4471 \end{aligned}$$

(*d*) Encontrar n, dado $(1{,}0385)^{-n} = 0{,}43884$.

$$-n \log 1{,}0385 = \log 0{,}43884$$
$$n \log 1{,}0385 = -\log 0{,}43884 = \operatorname{colog} 0{,}43884$$
$$n = \frac{\operatorname{colog} 0{,}43884}{\log 1{,}0385} = \frac{0{,}357693}{0{,}016406}$$
$$\begin{aligned} \log 0{,}35769 &= 9{,}553507-10 \\ -\log 0{,}016406 &= 8{,}215002-10 \\ \hline \log n &= 1{,}338505 \\ n &= 21{,}802 \end{aligned}$$

Problemas propuestos

13. Simplificar:

(*a*) $a^5 \cdot a^7$
(*b*) $a^8 \cdot a^5$
(*c*) $a^2 \cdot a^4 \cdot a^6$
(*d*) $a \cdot a^5 \cdot a$
(*e*) $\dfrac{a^8}{a^5}$
(*f*) $\dfrac{a^5}{a^8}$
(*g*) $\dfrac{a^4 \cdot a^8}{a^5}$
(*h*) $\dfrac{a^2 \cdot a^4}{a^9}$
(*i*) $(a^3)^9$
(*j*) $\left(\dfrac{1}{a^2}\right)^5$
(*k*) $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^4$
(*l*) $\left(\dfrac{a^2 \cdot a^3}{b^3 \cdot b^4}\right)^5$
(*m*) $(1{,}02)^8(1{,}02)^{12}$
(*n*) $(1{,}02)^{3 \cdot 10}$

Resp. (*a*) a^{12} (*b*) a^{13} (*c*) a^{12} (*d*) a^7 (*e*) a^3 (*f*) $1/a^3$ (*g*) a^7 (*h*) $1/a^3$ (*i*) a^{27} (*j*) $1/a^{10}$ (*k*) a^8/b^{12} (*l*) a^{25}/b^{35} (*m*) $(1{,}02)^{20}$ (*n*) $(1{,}02)^{30}$

14. Simplificar:

(*a*) $a^{1/2} \cdot a^{1/2}$
(*b*) $a^{1/3} \cdot a^{1/2}$
(*c*) $a^{5/2}/a^{1/2}$
(*d*) $a^{5/2}/a^{-1/2}$
(*e*) $(a^{-2})^3$
(*f*) $(a^{-2})^{-3}$
(*g*) $(a^{1/3})^6$
(*h*) $(a^{2/3})^{-6}$
(*i*) $27^{2/3}$
(*j*) $49^{-1/2}$
(*k*) $(x^{3/2})^{2/3}$
(*l*) $(x^9y^{12})^{1/3}$
(*m*) $x^3y^{n-2} \div xy^{n-1}$
(*n*) $\left(\dfrac{a^2}{b^4}\right)^{-3/2}\left(\dfrac{b^{1/2}}{a^{2/3}}\right)^4$

Resp. (*a*) a (*b*) $a^{5/6}$ (*c*) a^2 (*d*) a^3 (*e*) $1/a^6$ (*f*) a^6 (*g*) a^2 (*h*) $1/a^4$ (*i*) 9 (*j*) $1/7$ (*k*) x (*l*) x^3y^4 (*m*) x^2/y (*n*) b'/a'

15. Desarrollar y simplificar:

(*a*) $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
(*b*) $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$
(*c*) $(x+2y)^4 = x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$
(*d*) $(a+2)^8 = a^8 + 16a^7 + 112a^6 + 448a^5 + 1120a^4 + 1792a^3 + 1792a^2 + 1024a + 256$
(*e*) $(a-2)^7 = [a+(-2)]^7 = a^7 - 14a^6 + 84a^5 - 280a^4 + 560a^3 - 672a^2 + 448a - 128$

16. Desarrollar hasta 5 términos y simplificar:

(*a*) $(1+i)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}i - \frac{1}{9}i^2 + \frac{5}{81}i^3 - \frac{10}{243}i^4 + \cdots$
(*b*) $(1+i)^{-2/3} = 1 - \frac{2}{3}i + \frac{5}{9}i^2 - \frac{40}{81}i^3 + \frac{110}{243}i^4 - \cdots$

17. Aproximar, con 8 decimales: (*a*) $(1{,}015)^3$, (*b*) $(1{,}025)^4$, (*c*) $(1.005)^6$.
Resp. (*a*) 1,04567838, (*b*) 1,10381289, (*c*) 1,03037751

18. Aproximar, con 4 decimales: (*a*) $(1{,}03)^{10}$, (*b*) $(1{,}0075)^{20}$, (*c*) $(1{,}02)^{-8}$, (*d*) $(1{,}005)^{-25}$.
Resp. (*a*) 1,3439, (*b*) 1,1612, (*c*) 0,8535, (*d*) 0,8828

19. Aproximar, con 5 decimales: (*a*) $(1{,}015)^{1/2}$, (*b*) $(1{,}005)^{1/3}$, (*c*) $(1{,}02)^{1/4}$, (*d*) $(1{,}0075)^{1/6}$.
Resp. (*a*) 1,00747, (*b*) 1,00166, (*c*) 1,00496, (*d*) 1,00125

20. Encontrar el logaritmo de:

(*a*) 2584
(*b*) 75,96
(*c*) 6,29
(*d*) 0,3564
(*e*) 0,0186
(*f*) 0,00795
(*g*) 350,36
(*h*) 76,802
(*i*) 54535
(*j*) 1,0055
(*k*) 0,44644
(*l*) 0,052801
(*m*) 0,0024763
(*n*) 1,0258
(*o*) 1,00846

Resp. (*a*) 3,412293 (*b*) 1,880585 (*c*) 0,798651 (*d*) 9,551938 − 10 (*e*) 8,269513 − 10 (*f*) 7,900367 − 10 (*g*) 2,544514 (*h*) 1,885372 (*i*) 4,736675 (*j*) 0,002382 (*k*) 9,649763 − 10 (*l*) 8,722642 − 10 (*m*) 7,393804 − 10 (*n*) 0,011063 (*o*) 0,003659

21. Encontrar N, si:

(*a*) $\log N = 0{,}361917$
(*b*) $\log N = 2{,}856684$
(*c*) $\log N = 1{,}788695$
(*d*) $\log N = 3{,}856934$
(*e*) $\log N = 9{,}835900 - 10$
(*f*) $\log N = 7{,}801712 - 10$
(*g*) $\log N = 8{,}240962 - 10$
(*h*) $\log N = 6{,}009949 - 10$

Resp. (*a*) 2,3010 (*b*) 718.93 (*c*) 61,475 (*d*) 7193,4 (*e*) 0,68533 (*f*) 0,0063345 (*g*) 0,017417 (*h*) 0,00010232

22. Efectuar las siguientes operaciones utilizando logaritmos:

(*a*) $\dfrac{85{,}421}{19{,}668} = 4{,}3431$
(*b*) $\dfrac{70{,}75 \times 0{,}0284}{\sqrt[3]{0{,}0050246}} = 11{,}731$
(*c*) $\$225(1{,}8743) = \$421{,}72$
(*d*) $\$388{,}20(2{,}3484) = \$911{,}65$
(*e*) $\$784{,}60(1{,}028)^{10} = \$1034{,}10$
(*f*) $\$639{,}80(1{,}0038)^{-12} = \$611{,}33$
(*g*) $\$555{,}55(1{,}024)^{20}(1{,}038)^{-8} = \$662{,}44$
(*h*) $\$756{,}85(1{,}067)^{24}(1{,}042)^{-15} = \$1936{,}20$

23. Resolver para i: (*a*) $(1+i)^{12} = 1{,}8842$, (*b*) $(1+i)^{-15} = 0{,}64282$. *Resp.* (*a*) 0,0542, (*b*) 0,0299

24. Resolver para n:

(*a*) $(1{,}05)^n = 2$
(*b*) $(1{,}03)^n = 1.8426$
(*c*) $275(1{,}04)^n = 440{,}28$
(*d*) $(1{,}0125)^{-n} = 0{,}67532$
(*e*) $\dfrac{(1{,}06)^n - 1}{0{,}06} = 25{,}28$

Resp. (*a*) 14,207, (*b*) 20,677, (*c*) 12, (*d*) 31,602, (*e*) 15,840

Capítulo 3

Progresiones

UNA PROGRESION ARITMETICA es una sucesión de números, llamados *términos*, tales como

(i) $$6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26,\ 31,\ 36,\ 41$$

y

(ii) $$54,\ 50,\ 46,\ 42,\ 38,\ 34,\ 30,\ 26,\ 22,\ 18$$

en la cual cualquier término posterior al primero puede ser obtenido del término anterior mediante la suma de un número constante llamado *diferencia común*. En (i) hay 8 términos, el primero es 6 y cada uno de los términos siguientes se obtiene sumando la diferencia común 5, al término anterior. En (ii) hay 10 términos, el primero es 54 y cada uno de los términos siguientes se obtiene sumando la diferencia común —4 al término anterior.

Generemos una progresión aritmética con 7 términos, siendo a el primer término y d la diferencia común. La progresión será

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ a+5d,\ a+6d$$

Supóngase ahora que la progresión tiene n términos. Es claro que el n-ésimo término, o sea el último, sería

$$l = a + (n-1)d \tag{1}$$

Dicha progresión puede ser escrita como

(iii) $$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+(n-3)d,\ a+(n-2)d,\ a+(n-1)d$$

o

(iv) $$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ (l-2d),\ (l-d),\ l$$

Representando con s la suma de los términos de (iv), tenemos que,

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (l-2d) + (l-d) + l$$

o sea,

$$s = l + (l-d) + (l-2d) + \ldots + (a+2d) + (a+d) + a$$

Sumando término a término las dos expresiones anteriores obtenemos

$$\begin{aligned} 2s &= (a+l) + (a+l) + (a+l) + \ldots + (a+l) + (a+l) + (a+l) \\ &= n(a+l) \end{aligned}$$

Por tanto

$$s = \frac{n}{2}(a+l) \tag{2}$$

Hemos demostrado que la suma de una progresión aritmética de n términos es igual a la mitad del número de términos, multiplicada por la suma del primero y último términos.

Sustituyendo en (2) el valor dado en (1), tenemos

$$s = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \tag{2'}$$

Ejemplo 1.

(*a*) Encontrar el 12o. término y la suma de los 12 primeros términos de la progresión aritmética siguiente: 6, 11, 16, 21 . . .

Tenemos: $a = 6$, $d = 5$, y $n = 12$, por tanto,

$$l = a + (n-1)d = 6 + (12-1)5 = 61$$

y

$$s = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{12}{2}(6+61) = 402$$

(*b*) Encontrar la suma de los primeros 15 términos de la progresión aritmética 54, 50, 46, 42, . . .

En este caso: $a = 54$, $d = -4$, y $n = 15$, por tanto,

$$s = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{15}{2}[2(54) + 14(-4)] = \frac{15}{2}(108-56) = \frac{15}{2}(52) = 390$$

Véanse los problemas 1-4.

UNA PROGRESION GEOMETRICA es una sucesión de números, llamados *términos*, tales como

(i) $$4,\ -8,\ 16,\ -32,\ 64,\ -128,\ 256,\ -512,\ 1024,\ -2048$$

y

(ii) $$729,\ 486,\ 324,\ 216,\ 144,\ 96,\ 64$$

en la cual cualquier término posterior al primero puede ser obtenido del anterior, multiplicándolo por un número constante llamado *razón* (o cociente común). En (i) hay 10 términos; el primer término es 4 y cada uno de los términos siguientes se obtiene multiplicando el anterior por la razón —2. En (ii) hay 7 términos; el primero es 729 y cada uno de los términos siguientes se obtiene del anterior multiplicándolo por la razón 2/3.

Generemos una progresión geométrica con 8 términos, siendo a el primer término y r la razón. La progresión es

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ ar^5,\ ar^6,\ ar^7$$

Supóngase ahora que la progresión tiene n términos. Es claro que el n-ésimo término l, o sea el *último*, sería

$$l = ar^{n-1} \tag{3}$$

Representemos por s la suma de los n primeros términos de la progresión geométrica

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \ldots,\ ar^{n-1}$$

es decir, que

$$s = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

Entonces,

$$rs = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n,$$

$$s - rs = a + (ar - ar) + (ar^2 - ar^2) + (ar^3 - ar^3) + \ldots + (ar^{n-1} - ar^{n-1}) - ar^n$$

o sea que,

$$(1-r)s = a - ar^n$$

y

$$s = \frac{a - ar^n}{1-r} \tag{4}$$

Es más conveniente utilizar (4) cuando $r < 1$ y

$$s = \frac{ar^n - a}{r-1} \quad \text{cuando } r > 1 \tag{4'}$$

De (3), tenemos que, $$rl = ar^n$$

por lo cual (4) y (4') pueden ser escritos como

$$(5) \quad s = \frac{a - rl}{1 - r}, \text{ cuando } r < 1, \quad \text{y} \quad (5') \quad s = \frac{rl - a}{r - 1}, \text{ cuando } r > 1$$

Ejemplo 2.

(*a*) Encontrar el 10o. término y la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica 4, 8, 16, 32, . . .

En este caso $a = 4$, $r = 2$, y $n = 10$, por tanto,

$$l = ar^{n-1} = 4(2)^9 = 2048 \quad \text{y} \quad \frac{rl - a}{r - 1} = \frac{2(2048) - 4}{2 - 1} = 4092$$

(*b*) Encontrar la suma de los 12 primeros términos de la progresión geométrica 4, —8, 16, —32, . . .

En este caso $a = 4$, $r = -2$, $n = 12$, por tanto,

$$s = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{4 - 4(-2)^{12}}{1 - (-2)} = \frac{4 - 4(4096)}{3} = -5460$$

Véanse los problemas 5-7.

LA DEPRECIACION fue definida en el capítulo 1. Los métodos discutidos para determinar el cargo anual por depreciación dan lugar a serias objeciones. Por ejemplo, la depreciación de un activo en su primer año de uso es frecuentemente mayor que la del segundo, y la del segundo es mayor que la del tercero, y así sucesivamente. La tabla de depreciación de un automóvil muestra esta tendencia.

El *método de porcentaje fijo* responde a dicha objeción al suponer que el cargo por depreciación que debe hacerse al final de cada año es un porcentaje fijo del valor contable al principio del año. Sea C el costo original de un activo, S su valor de salvamento y n el número de años de vida útil. Sea d el porcentaje fijo anual. Al final del primer año, el cargo por depreciación es Cd y el valor contable es $C - Cd = C(1 - d)$. Al final del segundo año, el cargo por depreciación es $C(1 - d)d$ y el valor contable es $C(1 - d) - C(1 - d)d = C(1 - d)(1 - d) = C(1 - d)^2$.

Los valores contables sucesivos, durante la vida del activo, corresponden a los términos de la progresión geométrica

$$\text{(i)} \qquad C(1-d),\ C(1-d)^2,\ C(1-d)^3,\ \ldots$$

Por tanto, al final de n años, el valor contable es

$$\text{(ii)} \qquad C(1-d)^n = S$$

El valor d, *la tasa de depreciación*, puede ser un valor estimado o puede ser determinado de la relación dada en (ii), en cuyo caso es necesario utilizar logaritmos.

Ejemplo 3.

Se estima que una máquina con costo de $4800 tendrá una vida útil de 6 años y un valor de salvamento de $360. Determinar la tasa anual de depreciación y construir la tabla de depreciación correspondiente.

$C = 4800$, $S = 360$, $n = 6$; aplicando (ii), tenemos que:

$$4800(1-d)^6 = 360 \quad \text{y} \quad (1-d)^6 = \frac{360}{4800} = 0{,}075$$

$$\begin{aligned} 6 \log(1-d) &= \log 0{,}075 = 8{,}875061 - 10 \\ \log(1-d) &= 9{,}812510 - 10 \\ 1 - d &= 0{,}6494 \\ \text{y} \qquad d &= 0{,}3506 = 35{,}06\% \end{aligned}$$

En la tabla que sigue los valores contables al final de cada año se obtienen de la relación (i):

$$4800(0{,}6494) = 3117{,}12, \quad 4800(0{,}6494)^2 = 3117{,}12(0{,}6494) = 2024{,}26,$$

y, así sucesivamente. El cargo por depreciación, para cualquier año, es la diferencia entre el valor contable de ese año y el del año anterior. El importe del fondo para depreciación al final de cada año es la suma de los cargos por depreciación efectuados, incluyendo el del año o, también, la diferencia entre el costo original y el valor en libros actualizado.

Año	Valor contable al final del año	Cargo por depreciación	Importe del fondo para depreciación
0	4800,00		
1	3117,12	1682,88	1682,88
2	2024,26	1092,86	2775,74
3	1314,55	709,71	3485,45
4	853,67	460,88	3946,33
5	554,37	299,30	4245,63
6	360,00	194,37	4440,00

Nota. El valor contable final resultó de $360,01, que es la diferencia debida a la práctica de redondear las cantidades a dos decimales.

Véanse los problemas 8-9.

PROGRESION GEOMETRICA INFINITA. Considérese la progresión geométrica

$$1,\ 1/4,\ 1/16,\ 1/64,\ 1/256,\ \ldots$$

cuyo primer término es $a = 1$, y cuya razón es $r = \frac{1}{4}$. De (4), tenemos que la suma de los n primeros términos es

$$s = \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{(\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

En primer lugar observamos que para cualquier n, $s < 4/3$. Al aumentar n, $(\frac{1}{4})^{n-1}$ permanece positivo pero cada vez más pequeño; es decir, que a medida que n crece, s crece pero siempre es menor que $4/3$.

Sin embargo, podemos demostrar que para n suficientemente grande, o sea, sumando un número suficientemente grande de términos, la diferencia entre $4/3$ y s puede ser tan pequeña como deseemos. Supongamos, por ejemplo, que deseamos que la diferencia sea menor que 0,000001. Como $\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^9 = 0{,}0000013$ y $\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{10} = 0{,}00000032$, únicamente es necesario sumar los 11 primeros términos. El comportamiento de esta progresión geométrica puede expresarse diciendo que al crecer n sin limitación, o al tender n a infinito, la suma s de los primeros n términos se aproxima a $4/3$ como límite.

En la forma general de la progresión geométrica

$$a,\ ar,\ ar^2\ ar^3,\ \ldots$$

con

$$s = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}$$

se puede ver que, cuando r está entre -1, y 1, s tiende a $\frac{a}{1-r}$ como límite, al crecer n. En este caso, decimos que

$$S = \frac{a}{1 - r} \qquad (-1 < r < 1) \qquad (6)$$

es la suma de la progresión geométrica infinita.

Ejemplo 4.

Calcular la suma de la progresión geométrica infinita

(*a*) $$1,\ 1/2,\ 1/4,\ 1/8,\ \ldots$$

En este caso $a = 1$ y $r = \frac{1}{2} < 1$; por tanto, $S = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

(*b*) $$1,\ -1/4,\ 1/16,\ -1/64,\ \ldots$$

En este caso $a = 1$ y $r = -\frac{1}{4} > -1$; por tanto, $S = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{1}{1-(-\frac{1}{4})} = \dfrac{4}{5}$

Véanse los problemas 10-12.

Problemas resueltos

1. Calcular el 15o. término y la suma de los primeros 15 términos de la progresión aritmética 2, 5, 8, 11, 14, ...

$a = 2$, $d = 3$, $n = 15$; por lo cual,

$$l = a + (n-1)d = 2 + 14(3) = 44 \qquad \text{y} \qquad s = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{15}{2}(2+44) = 345$$

2. Calcular la suma de los primeros 20 términos de la progresión aritmética 48, 40, 32, 24, 16, ...

$a = 48$, $d = -8$, $n = 20$; por lo cual,

$$s = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{20}{2}[2(48) + 19(-8)] = -560$$

3. Calcular la suma de la progresión aritmética 1,00; 1,04; 1,08; 1,12; . . . , 2,16.

Utilizando $l = a + (n-1)d$, tenemos que, $2{,}16 = 1{,}00 + (n-1)(0{,}04)$. Por tanto,

$$(0{,}04)(n-1) = 2{,}16 - 1{,}00 = 1{,}16, \qquad n - 1 = \frac{1{,}16}{0{,}04} = 29 \qquad \text{y} \qquad n = 30$$

$$s = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{30}{2}(1{,}00 + 2{,}16) = 47{,}4$$

4. En la fecha, M debe \$4000. Decide pagar \$400 al final de cada 6 meses para disminuir la deuda, pagando además $2\frac{1}{2}\%$ de su obligación por concepto de intereses. Encontrar el interés total que debe pagar.

M debe hacer en total $\dfrac{4000}{400} = 10$ pagos. El primer pago por intereses es $4000(0{,}025) = \$100$. Al mismo tiempo, reduce su deuda a $4000 - 400 = \$3600$. El segundo pago por intereses es $3600(0{,}025) = \$90$. En forma similar, el tercer pago por intereses es \$80 y, así sucesivamente. El interés total pagado es la suma de los primeros 10 términos de la progresión aritmética 100, 90, 80, . . . Por tanto,

$$s = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = 5(200 - 90) = \$550$$

5. Encontrar el 8o. término y la suma de los 8 primeros términos de la progresión geométrica 1, 3, 9, 27, ...

$a = 1$, $r = 3$, $n = 8$; por tanto,

$$l = ar^{n-1} = (1)(3)^7 = 2187 \qquad \text{y} \qquad s = \frac{rl - a}{r-1} = \frac{3(2187) - 1}{3-1} = 3280$$

6. Hallar la suma de los 15 primeros términos de la progresión geométrica 1, 1,03, $(1{,}03)^2$, $(1{,}03)^3$, ...

$a = 1$, $r = 1{,}03$, $n = 15$; por tanto,

$$s = \frac{ar^n - a}{r-1} = \frac{(1)(1{,}03)^{15} - 1}{1{,}03 - 1} = \frac{(1{,}03)^{15} - 1}{0{,}03}$$

7. Encontrar la suma de la progresión geométrica $(1{,}04)^{-1}, (1{,}04)^{-2}, (1{,}04)^{-3}, \ldots, (1{,}04)^{-12}$.

$a = (1{,}04)^{-1}$, $r = (1{,}04)^{-1}$, $l = (1{,}04)^{-12}$; por tanto,

$$s = \frac{a - rl}{1-r} = \frac{(1{,}04)^{-1} - (1{,}04)^{-1}(1{,}04)^{-12}}{1 - (1{,}04)^{-1}} = \frac{1 - (1{,}04)^{-12}}{1{,}04 - 1} = \frac{1 - (1{,}04)^{-12}}{0{,}04}$$

8. Una máquina costó \$2000. La depreciación mensual al final de cualquier mes es calculada en 5% del valor al comienzo del mes. ¿Qué valor tendrá la máquina al cabo de 24 meses de uso?

Al final del primer mes la máquina valdrá $2000(1 - 0{,}05) = 2000(0{,}95) = \$1900$; al final del segundo mes, la máquina estará avaluada en $1900(0{,}95) = \$1805$; y, así sucesivamente. Se va a hallar el 24o. término de una progresión geométrica cuyo primer término es \$1900 y cuya razón es 0,95. Tenemos

$$l = ar^{n-1} = 1900(0{,}95)^{23} = \$583{,}99 \quad \text{(usando logaritmos)}$$

9. Una máquina nueva cuesta \$3150 y se deprecia hasta \$650, en 8 años. Hallar (*a*) la tasa de depreciación anual por el método del porcentaje constante y (*b*) el valor contable al final del quinto año.

(*a*) $C = 3150$, $S = 650$, $n = 8$; y ya que $C(1-d)^n = S$,

$$3150(1-d)^8 = 650 \qquad \text{y} \qquad (1-d)^8 = \frac{650}{3150}$$

$$\begin{aligned} 8 \log(1-d) &= \log 650 - \log 3150 = 9{,}314602 - 10 \\ \log(1-d) &= 9{,}914325 - 10 \\ 1 - d &= 0{,}82097 \end{aligned}$$

y $$d = 0{,}17903 = 17{,}903\%$$

(*b*) Al final de los 5 años, el valor contable es $B_5 = 3150(1-d)^5$.

$$\begin{aligned} \log B_5 &= \log 3150 + 5 \log(1-d) \\ &= 3{,}498311 + 5(9{,}914325 - 10) = 3{,}069936 \end{aligned}$$

y $$B_5 = \$1174{,}70$$

10. Se deja caer una bola desde una altura de 135 cm y rebota (cada vez que golpea el piso), dos terceras partes de la altura de la cual cae. (*a*) ¿Cuánto se elevará al cabo del 6o. rebote? (*b*) ¿Qué distancia habrá recorrido cuando golpea el piso por 8o. vez? (*c*) ¿Qué distancia habrá recorrido hasta alcanzar el reposo?

El primer rebote es $\frac{2}{3}(135) = 90$ cm; el segundo rebote es $\frac{2}{3}(90) = 60$ cm, etc.

(*a*) El 6o. término en la progresión para la cual $a = 90$ y $r = 2/3$ es

$$l = ar^{n-1} = 90(\tfrac{2}{3})^5 = 11\tfrac{23}{27} \text{ cm}$$

(*b*) La bola cae desde 135 cm, rebota y cae desde 90 cm, rebota y cae desde 60 cm y, así sucesivamente. La distancia recorrida será 135 más dos veces la suma de los 7 primeros términos de la progresión 90, 60, 40, . . . , o

$$135 + 2\,\frac{90 - 90(2/3)^7}{1 - 2/3} = 135 + 2\,\frac{20.590}{81} = 643\tfrac{32}{81} \text{ cm}$$

(*c*) La distancia recorrida será 135 más dos veces la suma de la progresión geométrica infinita 90, 60, 40, . . . , o

$$135 + 2\,\frac{a}{1-r} = 135 + 2\,\frac{90}{1 - 2/3} = 675 \text{ cm}$$

11. Trasformar 0,22222... en fracción común.

Podemos escribir

$$0{,}22222\ldots = 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + 0{,}0002 + \ldots$$

que es la suma de una progresión geométrica infinita cuyo primer término es 0,2 y cuya razón es 0,1; por tanto,

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{0{,}2}{1-0{,}1} = \frac{0{,}2}{0{,}9} = \frac{2}{9}$$

12. Trasformar 0,2272727... en fracción común.

Podemos escribir

$$0{,}2272727\ldots = 0{,}2 + \{0{,}027 + 0{,}00027 + 0{,}0000027 + \ldots\}$$

$$= 0{,}2 + \frac{0{,}027}{1-0{,}01} = \frac{2}{10} + \frac{27}{990} = \frac{5}{22}$$

Problemas propuestos

13. Hallar el 15º. término y la suma de los 15 primeros términos de las siguientes progresiones: (*a*) 2, 8, 14, 20,... (*b*) 3, 8, 13, 18,... *Resp.* (*a*) 86; 660 (*b*) 73; 570

14. Hallar la suma de: (*a*) los primeros 10 términos de 160, 148, 136, 124,...
(*b*) los primeros 12 términos de 600; 546,76; 493,52,...
Resp. (*a*) 1060 (*b*) 3686,16

15. Hallar la suma de: (*a*) los primeros 200 enteros positivos.
(*b*) los primeros 100 números pares.
Resp. (*a*) 20.100 (*b*) 10.000

16. Demostrar que $B + \left(B - \frac{B}{n}\right) + \left(B - 2\frac{B}{n}\right) + \cdots + \left[B - (n-1)\frac{B}{n}\right] = \frac{n+1}{2}B.$

17. Por la compra de una casa una persona se compromete a pagar \$2400 al final del primer año, \$2340 al final del segundo año, \$2280 al final del tercer año y, así sucesivamente. ¿Cuánto pagará por la casa si efectúa 15 pagos en total?
Resp. \$29.700

18. Encontrar el 9º. término y la suma de los 9 primeros términos de las siguientes progresiones:
(*a*) $3, 6, 12, 24, \ldots$ (*c*) $1, 1{,}05, (1{,}05)^2, (1{,}05)^3, \ldots$
(*b*) $243, 81, 27, 9, \ldots$ (*d*) $(1{,}02)^{-1}, (1{,}02)^{-2}, (1{,}02)^{-3}, \ldots$
Resp. (*a*) 768, 1533 (*b*) 1/27, $364\frac{13}{27}$ (*c*) $(1{,}05)^8, \frac{(1{,}05)^9 - 1}{0{,}05}$ (*d*) $(1{,}02)^{-9}, \frac{1-(1{,}02)^{-9}}{0{,}02}$

19. Determinar la cantidad total a repartir si se van a entregar 12 premios de \$1, \$2, \$4, . *Resp.* \$4095

20. Cada succión de una bomba de vacío extrae 4% del aire contenido en un tanque. ¿Qué cantidad de aire habrá en el tanque después de 50 succiones si al principio contenía 1 centímetro cúbico? *Resp.* 0,1299 centímetros cúbicos.

21. Un edificio tiene un costo de \$500.000. Al final de cada año, los propietarios deducen de su valor determinado al principio del año el 10% por concepto de depreciación. ¿Cuál será el valor del edificio al final de 25 años? *Resp.* \$35.896

22. Un motor con costo inicial de \$1050 se deprecia a la tasa de $7\frac{1}{2}$% anual. Determinar su valor contable al final del 7º. año
Resp. \$608,39

23. A una locomotora con costo de \$150.000 se le ha estimado un valor de salvamento de \$5000 y una vida probable de 30 años. Determinar: (*a*) la tasa de depreciación anual, (*b*) el valor en libros al final del 20º. año, y (*c*) el cargo por depreciación del 25º. año. *Resp.* (*a*) 10,718%, (*b*) \$15.536, (*c*) \$1058,10

24. Un automóvil con costo de \$2475 tiene una vida útil de 4 años y un valor de salvamento de \$400. (*a*) Determinar la tasa anual de depreciación. (*b*) Preparar una tabla de depreciación que muestre el valor contable cada año.
Resp. (*a*) 36,595%

25. Encontrar la suma de las siguientes progresiones geométricas infinitas:
(*a*) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$ (*d*) $1, 1/5, 1/25, 1/125, \ldots$
(*b*) $4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$ (*e*) $0{,}4, 0{,}04, 0{,}004, 0{,}0004, \ldots$
(*c*) $6, 4, 8/3, 16/9, \ldots$ (*f*) $\frac{1}{1+i}, \frac{1}{(1+i)^2}, \frac{1}{(1+i)^3}, \frac{1}{(1+i)^4}, \ldots$
Resp. (*a*) 2/3, (*b*) 8/3, (*c*) 18, (*d*) 5/4, (*e*) 4/9, (*f*) 1/*i*

26. Convertir a fracciónes comunes:
(*a*) 0,6666... (*b*) 0,454545... (*c*) 0,123123123... (*d*) 1,23333...
Resp. (*a*) 2/3, (*b*) 5/11, (*c*) 41/333, (*d*) 37/30

27. El método de *suma de dígitos* para depreciar un activo con costo *C*, con vida probable *n* y con valor de salvamento *S* responde a la objeción del método de depreciación lineal mediante el uso de distintas fracciones de la diferencia $C - S$, en cada año. El denominador de cada fracción es igual a

$$1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

y los numeradores son *n* para el primer año, $n - 1$ para el segundo, $n - 2$ para el tercero,..., 1 para el último año.
(*a*) Elaborar una tabla de depreciación para un automóvil con costo de \$3500, con vida probable de 5 años y con un valor de salvamento de \$800.
(*b*) Elaborar una tabla de depreciación para una máquina de \$5500 que tiene una vida útil de 8 años y un valor de salvamento de \$700.

Resultado parcial. Depreciación para el primer año: (*a*) $\frac{5}{15}(2700) = \$900$, (*b*) $\frac{8}{36}(4800) = \$1066{,}67$

28. Una variación del método de porcentaje fijo para depreciar un activo con costo *C* y con vida probable *n* ignora cualquier valor posible de salvamento y utiliza $d = 2/n$. De aquí que el valor contable después de $k \leq n$ años será:

$$C\left(1 - \frac{2}{n}\right)^k$$

(*a*) Elaborar una tabla de depreciación para un activo de \$5000 con vida probable de 5 años.
(*b*) Elaborar una tabla de depreciación para un activo de \$4000 con vida probable de 8 años.
Resultado parcial. Valor en libros final: (*a*) \$388,80, (*b*) \$400,46

Capítulo 4

Interés simple

COMO EJEMPLO de algunas operaciones que serán estudiadas en este libro considérense las siguientes:

(a) B obtiene de L un préstamo de \$500 y le firma un documento que establece que al término de 6 meses le pagará los \$500 prestados más una cantidad adicional de \$12,50.

(b) C compra un bono de \$1000 con vencimiento a 10 años, emitido por la compañía XYZ. El bono estipula, (i) el rembolso de los \$1000 al término de 10 años, y (ii) el pago de \$15 cada tres meses después de los 10 años.

La cantidad de \$12,50 mencionada en (a) y los \$15 de (b) son conocidos como pagos de intereses; es decir, que *el interés es la cantidad pagada por el uso de dinero obtenido en préstamo o la cantidad producida por la inversión del capital.*

Volviendo al ejemplo (a), parece lógico suponer que si B hubiera pedido a L \$1000 prestados por 6 meses, el cargo por intereses sería $2(12{,}50) = \$25$, y si hubiera pedido \$500 por 3 meses, el cargo por intereses sería $\frac{1}{2}(12{,}50) = \$6{,}25$, lo cual significa que el cargo por intereses sobre un préstamo depende tanto de la cantidad del préstamo como del tiempo que será utilizado el dinero. Por otra parte, si B hubiera pedido el préstamo de \$500 por un año, L podría requerir un pago de intereses de \$25 al final del año o dos pagos iguales de \$12,50, uno al final de 6 meses y otro al final del año. Más aun, si en este último caso B no cumpliera en pagar el primer cargo por intereses de \$12,50, L no se conformaría con un pago de \$25 al final del año, sino que reclamaría una cantidad adicional por concepto de intereses sobre el pago de intereses no cumplidos; es decir, que L consideraría los intereses omitidos como un préstamo adicional, puesto que si hubieran sido pagados en su vencimiento, él los podría haber invertido en cualquier otra forma. Con lo anterior, se ilustra la suposición básica de las matemáticas financieras: El dinero se invierte siempre en forma productiva, es decir, siempre está ganando intereses.

En ocasiones se notará que la práctica comercial no está de acuerdo con la lógica. Como ejemplo, consideremos el año que consta de 365 días (exceptuando los años bisiestos con 366 días), divididos en 12 meses, no todos iguales entre sí; sin embargo, frecuentemente al calcular intereses sobre préstamos a corto plazo se utiliza un año teórico que consiste de 12 meses, cada uno con 30 días exactamente.

LA TASA DE INTERES. Designamos por C a una cierta cantidad de dinero en una fecha dada cuyo valor aumenta a S en una fecha posterior;

C se conoce como capital,

S se conoce como *monto* o *valor acumulado de C*.

y

$I = S - C$ se conoce como *interés*.

Ejemplo 1.

B obtiene de L un préstamo de \$500 y al final de un año le paga \$525. En este caso $C = \$500$, $S = \$525$ e $I = S - C = \$25$.

La *tasa de interés* devengada o cargada es la razón del interés devengado al capital, en la unidad de tiempo. A menos que se establezca lo contrario, la unidad de tiempo convenida es de un año. La tasa anual de interés, representada por i, está dada como un porcentaje (por ejemplo, 6%), o como su equivalente en forma decimal (0,06). En los cálculos se utiliza la fracción decimal.

Ejemplo 2.

En el ejemplo 1, $i = \frac{I}{P} = \frac{25}{500} = 0{,}05$; es decir que L carga intereses a la tasa de 5%.

INTERES SIMPLE. Cuando únicamente el capital gana intereses por todo el tiempo que dura la transacción, al interés vencido al final del plazo se le conoce como *interés simple*. El interés simple sobre el capital C, por t años a la tasa i, está dado por la expresión

$$I = Cit \qquad (1)$$

y el monto simple está dado por

$$S = C + I = C + Cit = C(1 + it) \qquad (2)$$

Ejemplo 3.

Determinar el interés simple sobre \$750 al 4% durante $\frac{1}{2}$ año. ¿Cuál será el monto?

En este caso $C = 750$, $i = 0{,}04$ y $t = \frac{1}{2}$, por lo cual

$$I = Cit = 750(0{,}04)\tfrac{1}{2} = \$15$$

$$S = C + I = 750 + 15 = \$765$$

Véanse los problemas 1-6.

DOS PROBLEMAS TIPICOS del interés simple son:

(a) Hallar el interés simple sobre \$2000 al 5% durante 50 días.

(b) Hallar el interés simple sobre \$1500 al 6%, del 10 de marzo de 1971 al 21 de mayo de 1971.

Estos dos problemas se resuelven aplicando (I). Sin embargo, debido a las variaciones en la práctica comercial, pueden darse dos respuestas diferentes en el primer problema y no menos de cuatro en el segundo. La diversidad de resultados se origina en las diferentes prácticas para estimar t.

INTERES SIMPLE EXACTO Y ORDINARIO. El *interés simple exacto* se calcula sobre la base del año de 365 días (366 en años bisiestos). El interés simple ordinario se calcula con base en un año de 360 días. El uso del año de 360 días simplifica algunos cálculos, sin embargo aumenta el interés cobrado por el acreedor.

Ejemplo 4.

Determinar el interés exacto y ordinario sobre \$2000, al 5%, durante 50 días.

En este caso $C = 2000$ e $i = 0{,}05$.

<u>Interés simple exacto.</u>

Utilizando el año de 365 días tenemos que $t = \frac{50}{365} = \frac{10}{73}$ e $I = Cit = 2000(0{,}05)\left(\frac{10}{73}\right) = \frac{1000}{73} = \$13{,}70$.

<u>Interés simple ordinario.</u>

Utilizando un año de 360 días, tenemos que $t = \frac{50}{360} = \frac{5}{36}$ e $I = 2000(0{,}05)\left(\frac{5}{36}\right) = \frac{125}{9} = \$13{,}89$.

CALCULO EXACTO Y APROXIMADO DEL TIEMPO. Conociendo las fechas, el número de días que ha de calcularse el interés puede ser determinado de dos maneras:

Cálculo exacto del tiempo. Como su nombre lo indica, es el número exacto de días, tal como se encuentran en el calendario. *Se acostumbra contar una de las dos fechas dadas.*

Cálculo aproximado del tiempo. Se hace suponiendo que cada mes tiene 30 días.

Ejemplo 5.

Determinar en forma exacta y aproximada el tiempo trascurrido del 20 de junio de 1970 al 24 de agosto de 1970.

Tiempo exacto.

(*a*) El número requerido de días es igual al número de días restantes del mes de junio, más el número de días de julio, más el número de días indicado para agosto, es decir, $10 + 31 + 24 = 65$.

(*b*) En la tabla III, donde aparecen numerados todos los días del año desde el 1o. de enero, encontramos el 20 de junio numerado con 171 y a 24 de agosto numerado con 236. El número de días requerido es $236 - 171 = 65$, igual que en el ejemplo anterior

Tiempo aproximado.

Podemos escribir 24 de agosto de 1970 / 20 de junio de 1970 como

$$\begin{array}{r} 24 : 8 : 1970 \\ 20 : 6 : 1970 \\ \hline 4 : 2 : \quad 0 \end{array}$$

y restar

Así, el tiempo trascurrido aproximado es 2 meses y 4 días, es decir, 64 días ya que hemos supuesto que cada mes tiene 30 días. Nótese que como el año es el mismo en cada caso no se utiliza en el cálculo.

Véanse los problemas 6-7.

Ejemplo 6.

Determinar el interés exacto y ordinario sobre $2000 al 6%, del 20 de abril al 1o. de julio de 1971, calculando el tiempo, (*a*) en forma exacta, y (*b*) en forma aproximada.

El tiempo exacto es de 72 días y el tiempo aproximado de 71 días.

Interés exacto.

(*a*) $I = 2000(0{,}06)\left(\dfrac{72}{365}\right) = \dfrac{1728}{73} = \$23{,}67$

(*b*) $I = 2000(0{,}06)\left(\dfrac{71}{365}\right) = \dfrac{1704}{73} = \$23{,}34$

Interés ordinario.

(*a*) $I = 2000(0{,}06)\left(\dfrac{72}{360}\right) = \$24{,}00$

(*b*) $I = 2000(0{,}06)\left(\dfrac{71}{360}\right) = \dfrac{71}{3} = \$23{,}67$

De los cuatro métodos para calcular el interés simple, ilustrados en el ejemplo 6, el más corriente es el del interés ordinario con el número exacto de días, siendo éste el sistema utilizado por las instituciones bancarias, el cual, de los cuatro, es el método que produce el mayor interés en cualquier transacción.

Véanse los problemas 8-11.

PAGARES. Un pagaré es una promesa escrita de pago de una determinada cantidad de dinero, con intereses o sin ellos, en una fecha dada, suscrita por un deudor a favor de un acreedor. En un pagaré intervienen los siguientes elementos:

Bogotá, D.E. Enero 15, 1969

tres meses después de la fecha el suscrito promete pagar

a la orden de Alvaro Villegas

cinco mil 00 pesos

valor recibido con intereses al 6 por ciento

Alberto García

Plazo. Es el tiempo especificado explícitamente en el documento (número de meses) o (número de días).

Valor nominal. Es la suma estipulada en el documento.

Fecha de vencimiento. Es la fecha en la cual debe ser pagada la deuda.

Valor de vencimiento. Es la suma que debe ser pagada en la fecha de vencimiento.

En un pagaré, en el cual no se estipulen intereses, el valor nominal es igual al valor al vencimiento; en caso contrario, el valor al vencimiento siempre será mayor que el valor nominal.

En este libro, para determinar la fecha de vencimiento de un pagaré procederemos como sigue:

(*a*) si el plazo está dado en meses, el tiempo se determinará aproximadamente.

(*b*) si el plazo está dado en días, el tiempo se determinará exactamente.

Por ejemplo, tres meses después del 16 de marzo es el 16 de junio, mientras que 90 días después del 16 de marzo es el 14 de junio.

Siempre utilizaremos el interés simple ordinario en el cálculo del valor al vencimiento de un pagaré.

Ejemplo 7.

En un pagaré firmado el 15 de enero, con vencimiento de tres meses, por $5000 con un interés del 6%, el plazo es de 3 meses, la fecha de vencimiento es el 15 de abril y el valor de vencimiento es $5000 + 5000(0{,}06)\frac{1}{4} = \$5075$.

Existe otro tipo de documentos comerciales para el mismo fin, constituyendo todos ellos promesas de pago, por lo cual no serán estudiados por separado.

Véase el problema 12.

VALOR PRESENTE DE UNA DEUDA. El valor de una deuda, en una fecha anterior a la de su vencimiento, se le conoce como *valor presente* de la deuda en dicha fecha. De la relación $S = C(1 + it)$, tenemos que

$$C = \frac{S}{1 + it} \qquad (3)$$

es el valor presente a la tasa de interés simple i, del monto S, con vencimiento en t años.

Ejemplo 8.

Encontrar el valor presente, al 6% de interés simple, de $1500 con vencimiento en 9 meses.

En este caso, $S = 1500$, $i = 0{,}06$, $t = \frac{3}{4}$. Sabemos que $S = C(1 + it)$ por tanto,

$$1500 = C[1 + (0{,}06)(\tfrac{3}{4})] = C(1{,}045)$$

y

$$C = \frac{1500}{1{,}045} = \$1435{,}41 \quad \text{es el valor presente.}$$

Ejemplo 9.

Un pagaré de $1200 firmado el 1o. de abril con vencimiento en 8 meses y con interés de 5% es vendido a Y el 14 de julio con la base de un rendimiento en la inversión de 6%. ¿Cuánto paga Y por el documento?

La fecha de vencimiento del documento es el 1o. de diciembre y su valor al vencimiento es $1200[1 + (0{,}05)(2/3)] = \$1240$. Necesitamos encontrar el valor presente de $1240 con vencimiento en 140 días (del 14 de julio al 1o. de diciembre) al 6% de interés simple. Por tanto

$$C = \frac{S}{1 + it} = \frac{1240}{1 + (0.06)(7/18)} = \frac{3720}{3{,}07} = \$1211{,}73$$

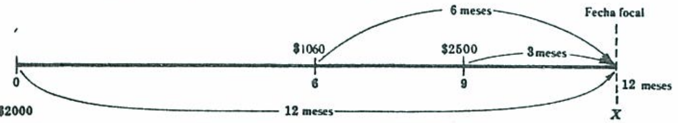
Véanse los problemas 13-14.

ECUACIONES DE VALOR. En algunas ocasiones es conveniente para un deudor cambiar el conjunto de sus obligaciones por otro conjunto. Para efectuar esta operación, tanto el deudor como el acreedor deben estar de acuerdo con la tasa de interés que ha de utilizarse en la transacción y en la fecha en que se llevará a cabo (a menudo llamada fecha focal). Examínense los problemas 15 y 16 para ver que es de esperarse un ligero cambio en el resultado al cambiar de fecha focal.

Ejemplo 10.

En la fecha, B debe $1000 por un préstamo con vencimiento en 6 meses, contratado originalmente a $1\frac{1}{2}$ años a la tasa de 4% y debe, además, $2500 con vencimiento en 9 meses, sin intereses. El desea pagar $2000 de inmediato y liquidar el saldo mediante un pago único dentro de un año. Suponiendo un rendimiento de 5% y considerando la fecha focal dentro de un año, determinar el pago único mencionado.

El valor al vencimiento del préstamo con intereses es $1000[1 + (0{,}04)(3/2)] = \$1060$. Designemos con X el pago requerido. Coloquemos, por encima de una línea de tiempo, las obligaciones originales ($1060 al final de 6 meses y $2500 al final de 9 meses) y por debajo el nuevo sistema de pagos ($2000 en la fecha y X al final de 12 meses).



Calculando cada valor en la fecha focal e igualando la suma del valor resultante de las obligaciones originales con el de las nuevas obligaciones, tenemos

$$\begin{aligned} 2000(1{,}05) + X &= 1060[1 + (0{,}05)(\tfrac{1}{2})] + 2500[1 + 0{,}05(\tfrac{1}{4})] \\ 2100 + X &= 1086{,}50 + 2531{,}25 \\ X &= 1086{,}50 + 2531{,}25 - 2100{,}00 \\ &= \$1517{,}75 \end{aligned}$$

Véanse los problemas 17-18.

Problemas resueltos

1. Encontrar el interés simple y el monto de $1000,

(*a*) al $4\frac{1}{2}\%$, durante 1 año. (*c*) al $3\frac{1}{2}\%$, durante $\frac{1}{2}$ año. (*e*) al 4%, durante 15 meses.
(*b*) al $5\frac{1}{4}\%$, durante 2 años. (*d*) al 6%, durante 8 meses. (*f*) al 5%, durante 10 meses.

(*a*) Tenemos que $C = 1000$, $i = 0{,}045$, $t = 1$; entonces,
$$I = Cit = 1000(0{,}045)(1) = \$45 \quad \text{y} \quad S = C + I = 1000 + 45 = \$1045$$

(*b*) Tenemos que $C = 1000$, $i = 0{,}0525$, $t = 2$; entonces,
$$I = Cit = 1000(0{,}0525)(2) = \$105 \quad \text{y} \quad S = C + I = 1000 + 105 = \$1105$$

(*c*) En este caso, $C = 1000$, $i = 0{,}035$, $t = \frac{1}{2}$; entonces,
$$I = Cit = 1000(0{,}035)(\tfrac{1}{2}) = \$17{,}50 \quad \text{y} \quad S = C + I = 1000 + 17{,}50 = \$1017{,}50$$

(*d*) $C = 1000$, $i = 0{,}06$, $t = 8/12 = 2/3$; entonces,
$$I = Cit = 1000(0{,}06)(2/3) = \$40 \quad \text{y} \quad S = C + I = \$1040$$

(*e*) $C = 1000$, $i = 0{,}04$, $t = 15/12 = 5/4$; entonces,
$$I = 1000(0{,}04)(5/4) = \$50 \quad \text{y} \quad S = \$1050$$

(*f*) $I = 1000(0{,}05)(5/6) = \$41{,}67$ y $S = \$1041{,}67$

2. ¿A qué tasa de interés simple,

(*a*) el monto de $2000 será 2110 en un año? (*b*) el monto de $720 será 744 en 10 meses?

(*a*) $C = 2000$, $S = 2110$, $I = S - C = 110$, $t = 1$
Aplicando $I = Cit$, $110 = 2000(i)(1) = 2000i$ e $i = \dfrac{110}{2000} = 0{,}055 = 5\frac{1}{2}\%$.

(*b*) $C = 720$, $S = 744$, $I = 744 - 720 = 24$, $t = 5/6$
Aplicando $I = Cit$, $24 = 720(i)(5/6) = 600i$ e $i = \dfrac{24}{600} = 0{,}04 = 4\%$.

3. X compró un radio en $79,95. Dio un anticipo de $19,95 y acordó pagar el resto en 3 meses, más un cargo adicional de $2. ¿Qué tasa de interés simple pagó?

Con la suposición de que X pagó $2 de intereses sobre 79,95 — 19,95 = $60,00, por tres meses, tenemos que $C = 60$, $I = 2$, $t = \frac{1}{4}$.
Aplicando $I = Cit$, $2 = 60(i)(\frac{1}{4}) = 15i$, e $i = 2/15 = 0{,}13333 = 13\frac{1}{3}\%$.

4. ¿En qué tiempo el monto de $2000 será $2125 al 5% de interés simple?

En este caso, $S = 2125$, $C = 2000$, $I = S - C = 125$, $i = 0{,}05$; aplicando $I = Cit$,
$$125 = 2000(0{,}05)t = 100t \quad \text{y} \quad t = \frac{125}{100} = 1{,}25$$
El tiempo requerido es $1\frac{1}{4}$ años.

5. ¿En qué tiempo se duplica una cantidad de dinero al 5% de interés simple?

Haciendo $C = 1$, $S = 2$, $I = 1$, y aplicando $I = Cit$, tenemos que
$$1 = (1)(0{,}05)t \quad \text{y} \quad t = \frac{1}{0{,}05} = 20 \text{ años}$$

6. Determinar en forma aproximada y exacta el tiempo trascurrido entre el 25 de enero de 1968 y el 15 de mayo de 1968.

Forma exacta. Utilizando un calendario, tenemos que 6 + 29 + 31 + 30 + 15 = 111 días. De la tabla III, tenemos que 135 — 25 = 110; sin embargo, como 1968 fue un año bisiesto, debemos agregar un día para el mes de febrero obteniendo 111 días.

Forma aproximada. Podemos escribir

$$\begin{array}{l} \text{15 de mayo} \\ \text{25 de enero} \end{array} \quad \text{como} \quad \begin{array}{l} 15 : 5 \\ 25 : 1 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{l} 45 : 4 \\ \underline{25 : 1} \\ 20 : 3 = 110 \text{ días} \end{array}$$

7. Determinar en forma exacta y aproximada el tiempo trascurrido entre el 15 de septiembre de 1968, y el 15 de febrero de 1969.

Forma exacta. Utilizando un calendario, tenemos 15 + 31 + 30 + 31 + 31 + 15 = 153 días. En la tabla III, encontramos 258 para el 15 de septiembre; febrero lo numeramos como 365 + 46 = 411, siendo el número de días requerido 411 — 258 = 153.

Forma aproximada. Podemos escribir

$$\begin{array}{l} 15 : 2 : 1969 \\ 15 : 9 : 1968 \end{array} \quad \text{como} \quad \begin{array}{l} 15 : 14 : 1969 \\ 15 : \ \,9 : 1969 \end{array} \quad \text{o sea} \quad \begin{array}{l} 15 : 14 \\ \underline{15 : \ \,9} \\ \ \ 0 : \ \,5 = 150 \text{ días} \end{array}$$

8. Comparar el interés exacto y ordinario sobre $2500 al 5%, del 15 de abril de 1971 al 25 de julio de 1971, con tiempo aproximado.

El tiempo aproximado son 100 días.

Interés exacto. $I = 2500(0{,}05)\left(\dfrac{100}{365}\right) = \dfrac{2500}{73} = \$34{,}25$

Interés ordinario. $I = 2500(0{,}05)\left(\dfrac{100}{360}\right) = \dfrac{625}{18} = \$34{,}72$

9. Determinar, de acuerdo con el sistema bancario, el interés simple sobre $4280, al 6%, del 21 de marzo al 25 de julio del mismo año.

El número exacto de días es 125. Daremos dos soluciones:

(*a*) $I = 4280(0{,}06)\left(\frac{125}{360}\right) = \frac{535}{6} = \$89{,}17$

(*b*) La solución siguiente se basa en el hecho que el interés simple ordinario sobre C, al 6%, durante 60 días es $(0,01)$C$. En consecuencia, sobre $4280 tenemos que

el interés simple al 6% durante 60 días es $42,80,
el interés simple al 6% durante 120 días es 2(42,80) = $85,60,
el interés simple al 6% durante 5 días es $\frac{1}{12}$(42,80) = $3,57, y
el interés simple al 6% durante 125 días es 85,60 + 3,57 = $89,17.

10. Determinar, de acuerdo con el sistema bancario, el interés simple sobre $3575 al 4¾% durante 80 días.

Damos 2 soluciones:

(*a*) $I = Cit = 3575(0{,}0475)\,\frac{80}{360} = \frac{2717}{72} = \$37{,}74$

(*b*) El interés al 6% durante 60 días es 35,75.

El interés al 6% durante 80 días es $\frac{4}{3}$(35,75) = $47,667.

El interés al 4% durante 80 días es $\frac{2}{3}$(47,667) = $31,778.

El interés al ¾% durante 80 días es $\frac{1}{8}$(47,667) = $5,958.

Por tanto, el interés al 4¾% durante 80 días es 31,778 + 5,958 = $37,74.

Nota. Las soluciones (*b*) de los problemas 10 y 11 son métodos abreviados que se utilizan con frecuencia. El lector debe decidir por sí mismo sobre su aplicación.

11. Demostrar que el interés simple exacto es igual al interés simple ordinario disminuido 1/73 de sí mismo.

Designemos con I_e el interés exacto y con I_o el interés ordinario. Si d es el número de días en los que se producen intereses, tenemos que

$$I_e = \frac{Cid}{365} \quad \text{e} \quad I_o = \frac{Cid}{360}$$

Por tanto, $\frac{I_e}{I_o} = \frac{Cid}{365}\cdot\frac{360}{Cid} = \frac{72}{73}$, de donde, $I_e = \frac{72}{73}I_o = \left(1 - \frac{1}{73}\right)I_o = I_o - \frac{1}{73}I_o$

que es lo que se quería demostrar.

12. Determinar para cada uno de los siguientes pagarés la fecha de vencimiento y el valor al vencimiento.

	Suma nominal	Fecha	Plazo	Tasa de interés
(*a*)	$2500	1o. de marzo	4 meses	6%
(*b*)	$3000	15 de junio	150 días	4%

(*a*) La fecha de vencimiento es la que corresponde al cuarto mes después del 1o. de marzo, es decir, el 1o. de julio; el valor al vencimiento es

$$S = C(1 + it) = 2500\,[1 + (0{,}06)(1/3)] = \$2550$$

(*b*) La fecha de vencimiento es, de acuerdo con la tabla III, el 12 de noviembre (166 + 150 = 316); el valor al vencimiento es

$$S = C(1 + it) = 3000\,[1 + (0{,}04)(5/12)] = 1000(3{,}05) = \$3050$$

13. ¿Qué suma debe ser invertida al 5% para tener $1000 después de 8 meses?

Necesitamos encontrar el valor presente de $1000 al 5%, con vencimiento en 8 meses. $S = 1000$; $i = 0{,}05$; $t = 2/3$; de la relación $S = C(1 + it)$, tenemos que

$$C = \frac{S}{1 + it} = \frac{1000}{1 + (0{,}05)(2/3)} = \frac{3000}{3{,}1} = \$967{,}74$$

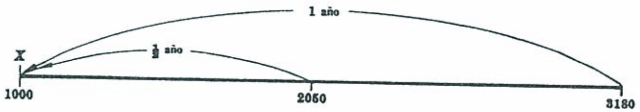
14. Un pagaré a 10 meses por $3000, al 6%, es suscrito el día de hoy. Determinar su valor dentro de 4 meses, suponiendo un rendimiento de 5%.

El valor al vencimiento del pagaré es 3000 [1 + (0,06)(5/6)] = $3150. Necesitamos determinar el valor presente de $3150 con vencimiento en 10 − 4 = 6 meses al 5%. Aplicando $S = C(1 + it)$, tenemos que

$$C = \frac{S}{1 + it} = \frac{3150}{1 + (0{,}05)(\frac{1}{2})} = \frac{6300}{2{,}05} = \$3073{,}17$$

15. Determinar el valor de las siguientes obligaciones, el día de hoy, suponiendo una tasa de 4% de interés simple: $1000 con vencimiento el día de hoy, $2000 con vencimiento en 6 meses con interés del 5% y $3000 con vencimiento en un año con intereses al 6%. Utilizar el día de hoy como fecha focal.

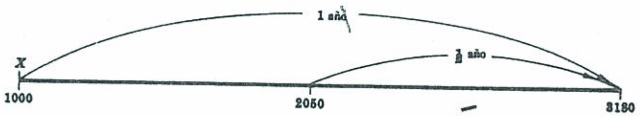
Designemos con $$X$ el valor requerido. $$X$ será la suma de los valores presentes al 4%, de las tres obligaciones: $1000 con vencimiento el día de hoy; 2000 [1 + (0,05)($\frac{1}{2}$)] = $2050 con vencimiento en 6 meses, y $3000 [1 + (0,06)(1)] = $3180 con vencimiento en un año.



O sea que

$$X = 1000 + \frac{2050}{1 + (0{,}04)(\frac{1}{2})} + \frac{3180}{1 + (0{,}04)(1)}$$
$$= 1000 + 2009{,}80 + 3057{,}69 = \$6067{,}49$$

16. Resolver el problema 15, considerando que la fecha focal está un año después.



Tenemos que

$$X(1{,}04) = 1000(1{,}04) + 2050[1 + (0{,}04)(\tfrac{1}{2})] + 3180$$
$$= 1040 + 2091 + 3180 = \$6311$$

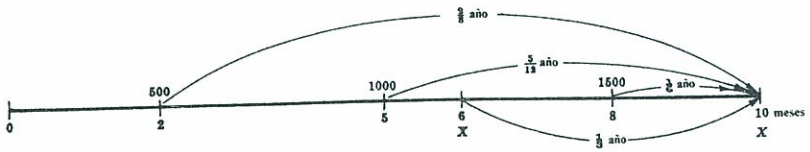
y

$$X = \frac{6311}{1{,}04} = \$6068{,}27$$

Obsérvese que el valor de X varía dependiendo de la fecha focal escogida.

17. X debe $500 con vencimiento en dos meses, $1000 con vencimiento en 5 meses y $1500 con vencimiento en 8 meses. Se desea saldar las deudas mediante dos pagos iguales, uno con vencimiento en 6 meses y otro con vencimiento en 10 meses. Determinar el importe de dichos pagos suponiendo un interés de 6%, tomando como fecha focal la fecha al final de 10 meses.

Designemos con X a cada uno de los pagos iguales. De la línea de tiempo tenemos



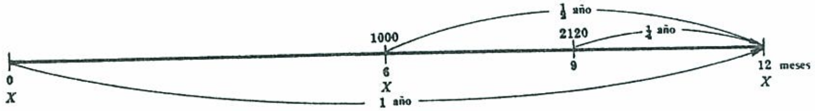
$$X[1+(0{,}06)(\tfrac{1}{3})] + X = 500[1+(0{,}06)(\tfrac{2}{3})] + 1000[1+(0{,}06)(\tfrac{5}{12})] + 1500[1+(0{,}06)(\tfrac{1}{6})]$$

$$1{,}02X + X = 500(1{,}04) + 1000(1{,}025) + 1500(1{,}01)$$

$$2{,}02X = 3060 \quad \text{y} \quad X = \frac{3060}{2{,}02} = \$1514{,}85$$

18. X debe a Y $1000 pagaderos dentro de 6 meses, sin intereses, y $2000 con intereses de 4% por 1½ años, con vencimiento dentro de 9 meses. Y está de acuerdo en recibir 3 pagos iguales, uno inmediato, otro dentro de 6 meses y el tercero dentro de un año. Determinar el importe de cada pago utilizando como fecha focal la fecha dentro de 1 año, suponiendo que Y espera un rendimiento de 5% en la operación.

Designemos con X cada uno de los pagos iguales. Con la ayuda de una línea de tiempo tenemos que



$$X(1{,}05) + X(1{,}025) + X = 1000(1{,}025) + 2120(1{,}0125)$$

$$3{,}075X = 1025{,}00 + 2146{,}50 = 3171{,}50$$

y

$$X = \frac{3171{,}50}{3{,}075} = \$1031{,}38$$

Problemas propuestos

19. Determinar el monto y el interés simple de
(*a*) $750 durante 9 meses al 5½%.
(*b*) $1800 durante 10 meses al 4½%.
(*c*) $600 durante 5 meses al 6%.
(*d*) $900 durante 4 meses al 3¾%.

Resp. (*a*) $30,94, $780,94; (*b*) $67,50, $1867,50; (*c*) $15, $615; (*d*) $11,25, $911,25

20. Hallar la tasa de interés simple sabiendo que el monto de $1650 es: (*a*) $1677,50 en 4 meses, (*b*) $1705 en 10 meses.
Resp. (*a*) 5%, (*b*) 4%

21. ¿Qué capital produce en 8 meses, (*a*) $48 al 6%?, (*b*) $50 al 5%?
Resp. (*a*) $1200, (*b*) $1500

22. ¿En qué tiempo un capital de $3000, (*a*) produce $90 al 4% de interés simple?, (*b*) alcanza un monto de $3100 al 5% de interés simple? *Resp.* (*a*) 9 meses, (*b*) 8 meses

23. Hallar el interés simple ordinario y exacto de
(*a*) $900 durante 120 días al 5%.
(*b*) $1200 durante 100 días al 6%.
(*c*) $1600 durante 72 días al 4%.

(*d*) $3000 durante 146 días al 3%.
(*e*) $1000, del 6 de agosto de 1960 al 14 de diciembre de 1969, al 4%.
(*f*) $1750, del 10 de junio de 1968 al 7 de noviembre de 1968, al 5%.
(*g*) $2500, del 21 de enero de 1968 al 13 de agosto de 1968, al 4½%.
(*h*) $2000, del 18 de octubre de 1961 al 6 de febrero de 1971, al 5¼%.

Resp. (*a*) $15, $14,79 (*b*) $20, $19,73 (*c*) $12,80, $12,62 (*d*) $36,50, $36,00 (*e*) $14,44, $14,25 (*f*) $36,46, $35,96 (*g*) $64,06, $63,18 (*h*) $32,38, $31,93

24. Determinar la fecha de vencimiento y el valor al vencimiento de cada uno de los siguientes pagarés

	Valor nominal	Fecha	Plazo	Tasa de interés
(*a*)	$2000	25 de abril	3 meses	5½%
(*b*)	$3000	5 de marzo	8 meses	5%
(*c*)	$1250	10 de junio	4 meses	6%
(*d*)	$2500	1o. de enero	7 meses	4%
(*e*)	$1600	10 de feb.	120 días	7%
(*f*)	$3200	28 de nov.	45 días	8%
(*g*)	$1500	15 de ago.	60 días	6%
(*h*)	$2750	5 de julio	135 días	

Resp. (*a*) 25 de julio, $2000
(*b*) 5 de noviembre, $3110
(*c*) 10 de octubre, $1270,83
(*d*) 1o. de agosto, $2587,50
(*e*) 10 de junio, $1621,33
(*f*) 12 de enero, $3228,00
(*g*) 14 de octubre, $1520,00
(*h*) 17 de noviembre, $2811,88

25. Determinar el valor de un préstamo de $2500 con vencimiento dentro de 9 meses, (*a*) el día de hoy, (*b*) dentro de 3 meses, (*c*) dentro de 7 meses, (*d*) dentro de un año; suponiendo un rendimiento del 6%.
Resp. (*a*) $2392,34, (*b*) $2427,18, (*c*) $2475,25, (*d*) $2537,50

26. X obtiene de Y un préstamo de $1200 a dos años, con intereses al 6%. ¿Qué cantidad tendría que aceptar Y como liquidación del préstamo 15 meses después de efectuado suponiendo que desea un rendimiento del 5%? *Resp.* $1295,42

27. El señor Pérez debe $450 con vencimiento dentro de 4 meses y $600 con vencimiento dentro de 6 meses. Si desea saldar las deudas mediante un pago único inmediato, ¿cuál será el importe de dicho pago suponiendo un rendimiento del 5%? Utilizar como fecha focal el día de hoy. *Resp.* $1027,99

28. En el problema 27, ¿cuál deberá ser el pago único a partir de hoy, (*a*) después de 3 meses?, (*b*) después de 5 meses?, (*c*) después de 9 meses, para saldar ambas deudas? Utilizar como fecha focal de cada caso la fecha del pago único.
Resp. (*a*) $1040,72, (*b*) $1049,39, (*c*) $1066,88

29. ¿Qué oferta es más conveniente para el comprador de una casa: $4000 iniciales y $6000 después de 6 meses o $6000 iniciales y $4000 después de un año? Supóngase un interés del 6% y compárese en la fecha de la compra, el valor de cada oferta.

30. Una persona debe $2000, para pagar en un año con intereses al 6%. Conviene pagar $500 al final de 6 meses. ¿Qué cantidad tendrá que pagar al final de 1 año para liquidar el resto de la deuda suponiendo un rendimiento del 6%? Tomar como fecha focal la fecha después de un año. *Resp.* $1605

31. Una persona debe $2000 con vencimiento en 2 meses, $1000 con vencimiento en 5 meses y $1800 con vencimiento en 9 meses. Desea liquidar sus deudas mediante dos pagos iguales con vencimiento en 6 meses y 12 meses respectivamente. Determinar el importe de cada pago suponiendo un rendimiento del 6% y tomando como fecha focal la fecha un año después. *Resp.* $2444,33

32. Una persona debe $500 con vencimiento en 3 meses e intereses al 5% y $1500 con vencimiento en 9 meses al 4%. ¿Cuál será el importe del pago único que tendrá que hacerse dentro de 6 meses para liquidar las deudas suponiendo un rendimiento del 6%? Tomar como fecha focal la fecha, (*a*) al final de 6 meses, y (*b*) al final de 9 meses.
Resp. (*a*) $2036,01, (*b*) $2035,90

33. El señor Jiménez adquiere un terreno de $5000 mediante un pago de contado de $500. Conviene en pagar el 6% de interés sobre el resto. Si paga $2000 tres meses después de la compra y $1500 seis meses más tarde, ¿cuál será el importe del pago que tendrá que hacer 1 año después para liquidar totalmente el saldo? Tomar como fecha focal la fecha al final de 1 año. *Resp.* $1157,50

Capítulo 5

Descuento simple

DESCUENTO SIMPLE A UNA TASA DE INTERES. El valor presente C de una cantidad S con vencimiento en una fecha posterior, tal como se definió en el capítulo 4, puede ser interpretado como el *valor descontado de S*. A la diferencia $D_r = S - C$ se le conoce como *descuento simple de S a una tasa de interés* o sea *el descuento racional sobre S*.

Ejemplo 1.

Determinar el valor presente, al 6% de interés simple, de \$1500 con vencimiento en 9 meses. ¿Cuál es el descuento racional?

En este caso, $S = 1500$, $i = 0{,}06$, $t = 3/4$; de la relación $S = C(1 + it)$, tenemos que

$$C = \frac{S}{1+it} = \frac{1500}{1+(0{,}06)(3/4)} = \frac{1500}{1{,}045} = \$1435{,}41 \quad \text{es el valor presente}$$

y $D_r = S - C = 1500 - 1435{,}41 = \$64{,}95$ es el descuento racional.

Véanse los problemas 1-2.

Nota. Para una tasa de interés dada, a la diferencia $S - C$ se le ha dado, hasta ahora, dos interpretaciones: (i) es el *interés I* que al sumarse a C produce S; (ii) es el *descuento racional* D_r que al restarse de S produce C.

DESCUENTO SIMPLE A UNA TASA DE DESCUENTO. La *tasa de descuento* se define como la razón del descuento dado en la unidad de tiempo (en este caso un año) al capital sobre el cual está dado el descuento. La tasa de descuento anual se expresa como un porcentaje.

El *descuento simple D* (conocido también como *descuento bancario*) sobre una cantidad S por t años *a la tasa de descuento d*, está dado por

$$D = Sdt \tag{1}$$

y el *valor presente* de S está dado por

$$C = S - D = S - Sdt = S(1 - dt) \tag{2}$$

Ejemplo 2.

Hallar el descuento simple sobre una deuda de \$1500 con vencimiento en 9 meses a una tasa de descuento de 6%. ¿Cuál es el valor presente de la deuda?

Tenemos que $S = 1500$, $d = 0{,}06$, $t = 3/4$; por tanto,

$$D = Sdt = 1500(0{,}06)(3/4) = \$67{,}50 = \text{descuento simple}$$

y

$$C = S - D = 1500 - 67{,}50 = \$1432{,}50 = \text{valor presente}$$

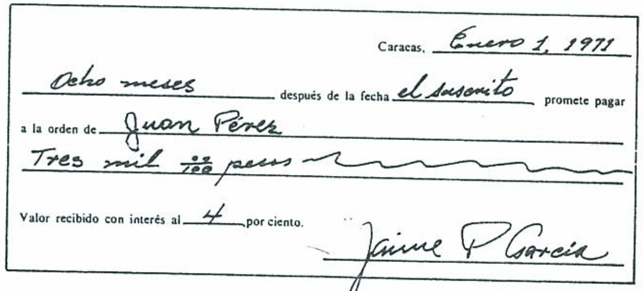
Comparando los ejemplos 1 y 2, vemos que cuando el descuento está involucrado, el uso de la tasa de descuento en lugar de la tasa de interés, simplifica los cálculos. Por esta razón, el descuento racional rara vez se utiliza. Al descuento bancario se le conoce frecuentemente como *interés por adelantado*.

Véanse los problemas 3-7.

DESCUENTO DE PAGARES. Un pagaré puede ser vendido una o más veces antes de la fecha de vencimiento. Cada comprador descuenta el valor del documento al vencimiento desde la fecha de la venta hasta la fecha de vencimiento a su tasa de descuento fijada.

Ejemplo 3.

¿Cuál es el importe de la venta del siguiente pagaré, al señor Tomás Martínez, 5 meses antes del vencimiento, a la tasa de descuento de 8%?


Caracas, Enero 1, 1971

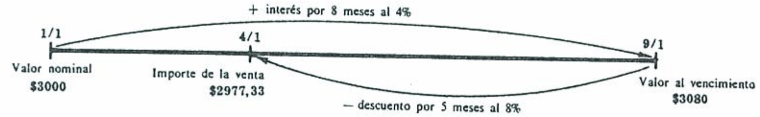
Ocho meses después de la fecha el suscrito promete pagar a la orden de Juan Pérez

Tres mil 00/100 pesos

Valor recibido con interés al 4 por ciento.

Jaime P. García

Un diagrama de tiempo será de utilidad



(i) Interés sobre \$3000 al 4% durante 8 meses $= 3000(0{,}04)(2/3) = \$80$.

Valor al vencimiento $= 3000 + 80 = \$3080$.

(ii) El período de descuento es 5 meses.

Descuento sobre \$3080 al 8%, por 5 meses $= 3080(0{,}08)(5/12) = \$102{,}67$.

Importe de la venta $= 3080 - 102{,}67 = 2977{,}33$.

Tomás Martínez le paga a Pérez \$2977,33 y obtiene la posesión del documento. Si Martínez lo conserva hasta el vencimiento (1o. de septiembre) recibirá de Jaime P. García el valor al vencimiento, o sea \$3080.

Véanse los problemas 8-10.

Problemas resueltos

1. ¿Cuál es el valor actual de una serie de bonos que totalizan \$1200 y cuyo vencimiento es dentro de un mes, suponiendo una tasa de interés de 6%? ¿Cuál es el descuento racional?

En este caso, $S = 1200$, $i = 0{,}06$, $t = 1/12$; de la relación $S = C(1 + it)$ tenemos que

$$C = \frac{S}{1+it} = \frac{1200}{1+(0{,}06)(1/12)} = \frac{1200}{1{,}005} = \$1194{,}03, \quad \text{es el valor actual}$$

El descuento racional es $S - C = 1200 - 1194{,}03 = \$5{,}97$.

2. Determinar el valor al 1o. de mayo de un pagaré, sin intereses, de \$1500 pagaderos el 15 de junio, suponiendo una tasa de interés simple de 5%. ¿Cuál es el descuento racional?

En este caso, $S = 1500$, $i = 0{,}05$, $t = 45/360 = 1/8$; de donde

$$C = \frac{S}{1+it} = \frac{1500}{1+(0{,}05)(1/8)} = \frac{12.000}{8{,}05} = \$1490{,}68, \quad \text{valor al 1o. de mayo}$$

El descuento racional es $S - C = 1500 - 1490{,}68 = \$9{,}32$.

3. Hallar el valor actual, al 5% de descuento simple de
(*a*) $1000 con vencimiento en 1 año.
(*b*) $1200 con vencimiento en $\frac{1}{2}$ año.
(*c*) $800 con vencimiento en 3 meses.

(*a*) $S = 1000$, $d = 0{,}05$, $t = 1$; por tanto,

$$D = Sdt = 1000(0{,}05)(1) = \$50 \quad \text{y} \quad C = S - D = 1000 - 50 = \$950$$

(*b*) $S = 1200$, $d = 0{,}05$, $t = \frac{1}{2}$; por tanto,

$$D = Sdt = 1200(0{,}05)(\tfrac{1}{2}) = \$30 \quad \text{y} \quad C = S - D = 1200 - 30 = \$1170$$

(*c*) $D = 800(0{,}05)(\frac{1}{4}) = \$10$ y $C = \$790$.

4. Un banco carga el 6% de intereses por adelantado (6% de descuento simple). Si X firma un documento por $2000 a 5 meses, ¿qué cantidad recibirá del banco?

$S = 2000$, $d = 0{,}06$, $t = 5/12$; por lo cual

$$C = S(1 - dt) = 2000[1 - (0{,}06)(5/12)] = 2000(0{,}975) = \$1950$$

5. ¿Qué tasa de interés simple paga X, en el problema 4?

X paga $50 pesos de intereses por el uso de $1950 durante 5 meses.

De la relación $I = Cit$ tenemos que $i = \dfrac{I}{Ct} = \dfrac{50}{(1950)(5/12)} = 0{,}06154$ o sea 6,15% aproximadamente.

6. Determinar el valor del documento a 5 meses que X debe firmar con el objeto de recibir $2000 del banco, del problema 4.

$C = 2000$, $d = 0{,}06$, $t = 5/12$; de la relación $C = S(1 - dt)$,

$$S = \frac{C}{1 - dt} = \frac{2000}{1 - (0{,}06)(5/12)} = \frac{2000}{0{,}975} = \$2051{,}28$$

7. ¿Cuál es la tasa de interés i equivalente a una tasa de descuento de, (*a*) 5% por dos meses?, (*b*) 5% por 9 meses?

Tomar $S = 1$.

(*a*) Al 5% de descuento simple, $C = S(1 - dt) = 1 - 0{,}05(1/6) = \dfrac{5{,}95}{6}$.

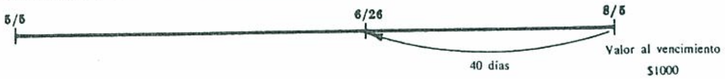
A la tasa de interés simple i, $C = \dfrac{S}{1 + it} = \dfrac{1}{1 + i/6} = \dfrac{6}{6 + i}$.

Por tanto, $\dfrac{5{,}95}{6} = \dfrac{6}{6 + i}$, $5{,}95i = 36 - 35{,}70 = 0{,}3$, e $i = 5{,}04\%$.

(*b*) Como en (*a*), tenemos que $C = 1 - 0{,}05\,(3/4) = \dfrac{3{,}85}{4}$ y $C = \dfrac{1}{1 + 3i/4} = \dfrac{4}{4 + 3i}$.

Por tanto, $\dfrac{3{,}85}{4} = \dfrac{4}{4 + 3i}$, $11{,}55i = 16 - 15{,}40 = 0{,}6$, e $i = 5{,}19\%$.

8. Un pagaré de $1000 a tres meses, sin intereses, firmado el 5 de mayo fue descontado el 26 de junio al 6%. Determinar el valor de la transacción.

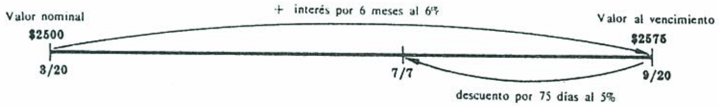


La fecha de vencimiento es el 5 de agosto y el valor al vencimiento es $1000.

El período del descuento es 40 días (del 26 de junio al 5 de agosto).

El descuento es $1000\,(0{,}06)(40/360) = \$6{,}67$, y el valor de la transacción $= 1000 - 6{,}67 = \$993{,}33$.

9. Un documento por $2500 a 6 meses, con intereses al 6%, fechado el 20 de marzo, fue descontado el 7 de julio al 5%. Hallar el importe de la operación.

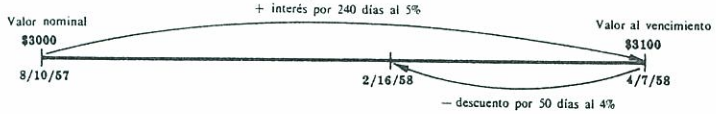


Valor al vencimiento $= 2500 + 2500(0{,}06)(1/2) = \$2575$.

Período de descuento (del 7 de julio al 20 de septiembre) = 75 días.

Importe de la operación $= 2575 - 2575(0{,}05)(75/360) = \$2548{,}18$.

10. Un documento por $3000 a 240 días con intereses al 5%, fechado el 10 de agosto de 1967 fue descontado el 16 de febrero de 1968 al 4%. Hallar el importe de la operación.



Valor al vencimiento $= 3000 + 3000(0{,}05)(240/360) = \$3100$.

Importe de la operación $= 3100 - 3100(0{,}04)(50/360) = \$3082{,}78$.

Problemas propuestos

11. Una hipoteca tiene un valor de $1200 al vencimiento. Determinar su valor 5 meses antes del vencimiento, suponiendo un rendimiento de $4\frac{1}{2}$% de interés simple. ¿Cuál es el descuento racional? *Resp.* $1177,91; $22,09

12. X recibirá un dividendo de $750 el 14 de junio. ¿Cuál es su valor el 30 de abril suponiendo un rendimiento de 5% de interés simple? ¿Cuál es el descuento racional? *Resp.* $745,34; $4,66

13. Un documento por $600 establece 5% de interés simple por 120 días. Si B descuenta el documento 30 días antes del vencimiento para obtener 4% de interés simple, ¿cuál es el descuento? *Resp.* $2,03

14. Determinar el descuento simple sobre
(*a*) $3500 por 60 días al 4% de descuento simple.
(*b*) $5000 por 90 días al $3\frac{1}{2}$% de descuento simple.
(*c*) $1200 por 4 meses al 5% de descuento simple.
(*d*) $2500 del 5 de marzo al 10 de abril, al 6% de descuento simple.
(*e*) $4000 del 10 de octubre al 13 de noviembre al $5\frac{1}{2}$% de descuento simple.
(*f*) $3000 del 15 de septiembre al 30 de octubre al $4\frac{1}{2}$% de descuento simple.

Resp. (*a*) $23,33, (*b*) $43,75, (*c*) $20, (*d*) $15, (*e*) $20,78, (*f*) $16,88

15. Un banco carga el 6% de interés simple por adelantado (o sea, 6% de descuento simple), en préstamos a corto plazo. Determinar la cantidad recibida por una persona que solicita:
(*a*) $1500 por 60 días.
(*b*) $1750 por 6 meses.
(*c*) $2000 por 8 meses.
(*d*) $1000 del 1o. de marzo al 20 de abril.
(*e*) $2550 del 5 de mayo al 16 de julio.
(*f*) $3000 del 1o. de junio al 18 de noviembre.

Resp. (*a*) $1485, (*b*) $1697,50, (*c*) $1920, (*d*) $991,67, (*e*) $2519,40, (*f*) $2915

16. ¿Qué tasa de interés simple pagó el prestatario en cada uno de los préstamos del problema 15?
Resp. (*a*) 6,06%, (*b*) 6,19%, (*c*) $6\frac{1}{4}$%, (*d*) 6,05%, (*e*) 6,07%, (*f*) 6,17%

17. Un banco carga el 5% de descuento simple en préstamos a corto plazo. Determinar el valor del documento, sin intereses, dado al banco si el prestatario recibe

(*a*) $2500 por 60 días. (*d*) $1500 del 20 de septiembre al 4 de noviembre.
(*b*) $1250 por 3 meses. (*e*) $2000 del 21 de junio al 1o. de septiembre.
(*c*) $1750 por 5 meses. (*f*) $3000 del 11 de junio al 18 de noviembre.
Resp. (*a*) $2521,01, (*b*) $1265,82, (*c*) $1787,23, (*d*) $1509,43, (*e*) $2020,20, (*f*) $3068,18

18. El Banco Central descuenta al 5% un documento sin intereses de $5000 con vencimiento en 60 días. El mismo día, el documento es vuelto a descontar por el Banco del Ahorro al 4%, pero utilizándose un año de 365 días en el cálculo. Determinar la utilidad obtenida por el Banco Central en la operación. *Resp.* $8,79

19. Determinar el importe de la operación en la fecha de descuento de cada uno de los siguientes documentos.

	Valor nominal	Fecha	Plazo	Tasa de interés	Fecha del descuento	Tasa de descuento
(*a*)	$2000	19 de abril	3 meses	—	30 de mayo	6%
(*b*)	$3500	5 de junio	4 meses	—	21 de agosto	5%
(*c*)	$1000	10 de julio	75 días	—	25 de julio	$5\frac{1}{2}$%
(*d*)	$4500	15 de marzo	90 días	—	26 de mayo	8%
(*e*)	$3000	12 de enero	6 meses	4%	28 de abril	5%
(*f*)	$800	9 de febrero	45 días	5%	1o. de marzo	$6\frac{1}{2}$%
(*g*)	$1200	1o. de noviembre	4 meses	6%	4 de febrero	5%
(*h*)	$2700	1o. de noviembre	120 días	6%	24 de enero	5%
(*i*)	$2500	30 de marzo	90 días	7%	14 de mayo	8%
(*j*)	$3000	10 de junio	5 meses	$4\frac{1}{2}$%	1o. de septiembre	4%

Resp. (*a*) $1983,33 (*c*) $990,83 (*e*) $3028,12 (*g*) $1219,75 (*i*) $2518,31
(*b*) $3478,12 (*d*) $4482 (*f*) $801,37 (*h*) $2740,23 (*j*) $3032,48

20. Determinar, en el problema 19, la tasa de interés simple que gana el comprador si conserva los documentos hasta su vencimiento.
Resp. (*a*) 6,05% (*c*) 5,55% (*e*) 5,05% (*g*) 5,02% (*i*) 8,08%
(*b*) 5,03% (*d*) 8,03% (*f*) 6,53% (*h*) 5,03% (*j*) 4,03%

21. Aplicando la ecuación (*2*), demostrar que el interés simple que gana C en t años, es $\dfrac{C}{1-dt} - C = \dfrac{C\,dt}{1-dt}$ y que la tasa anual de interés simple es

$$i = \frac{d}{1-dt} \qquad (3)$$

22. Resolver la ecuación (*3*) del problema 21 para obtener

$$d = \frac{i}{1+it} \qquad (4)$$

como la tasa de descuento simple correspondiente a la tasa de interés simple i.

23. Un banco desea ganar el 6% de interés simple por el descuento de documentos. ¿Qué tasa de descuento debe utilizar si el período del descuento es (*a*) 2 meses?, (*b*) 90 días?, (*c*) 6 meses?, (*d*) 240 días?
Resp. (*a*) 5,94%, (*b*) 5,91%, (*c*) 5,83%, (*d*) 5,77%

Capítulo 6

Pagos parciales

LAS OBLIGACIONES FINANCIERAS en ocasiones son cumplidas mediante una serie de pagos parciales, dentro del período de la obligación, en lugar de un pago único en la fecha de vencimiento. Surge el problema de encontrar la cantidad por liquidar en la fecha de vencimiento cuando se han hecho una serie de pagos parciales. Utilizaremos dos métodos para solucionar el problema, *la regla comercial* y *la regla de los Estados Unidos*, (traducido del original *Merchant's Rule* y *United States Rule*).

Regla comercial

Con esta regla, el interés se calcula sobre la deuda original y sobre cada pago parcial a la fecha de vencimiento. La cantidad por liquidar en la fecha de vencimiento es la diferencia entre el monto de la deuda y la suma de los pagos parciales. Esta clase de problemas pueden ser resueltos mediante una ecuación de valor (véase el capítulo 4) haciendo que la fecha de vencimiento sea la fecha focal.

Ejemplo 1.
Una deuda de $2000 con intereses de 5% vence en 1 año. El deudor paga $600 en 5 meses y $800 en 9 meses. Hallar el saldo de la deuda en la fecha de vencimiento.

Primera solución.
Se determina el interés simple sobre la deuda original de $2000 por 1 año, sobre el primer pago parcial ($600) por 12 — 5 = 7 meses y sobre el segundo pago parcial ($800) por 12 — 9 = 3 meses.

Deuda original	2000	Primer pago parcial	600,00
Interés por 1 año	100	Interés por 7 meses	17,50
Monto	2100	Segundo pago parcial	800,00
		Interés por tres meses	10,00
Saldo de la deuda en la fecha de vencimiento: 2100 — 1427,50 = $672,50		Suma de los pagos parciales	1427,50

Segunda solución.
Escribiendo una ecuación de valor tomando como fecha focal el final de un año, tenemos

$$X + 600[1 + (0{,}05)(\tfrac{7}{12})] + 800[1 + (0{,}05)(\tfrac{1}{4})] = 2000[1 + (0{,}05)(1)]$$
$$X + 617{,}50 + 810{,}00 = 2100 \quad \text{y} \quad X = \$672{,}50$$

Regla de los Estados Unidos

Con esta regla, el interés se calcula sobre el saldo no pagado (o insoluto) de la deuda cada vez que se efectúa un pago parcial. Si el pago es mayor que el interés vencido, la diferencia se aplica en reducir la deuda. Si el pago es menor que el interés vencido, el pago se lleva *sin interés* hasta que se hagan otros pagos parciales cuyo monto exceda el interés vencido a la fecha del último de dichos pagos parciales.

Ejemplo 2.

Resolver el ejemplo 1, aplicando la regla de los Estados Unidos.

Deuda original	2000,00
Interés por 5 meses	41,67
Suma vencida en 5 meses	2041,67
Primer pago parcial	600,00
Saldo debido después de 5 meses	1441,67
Interés por 4 meses	24,03
Suma vencida en 9 meses	1465,70
Segundo pago parcial	800,00
Saldo debido después de 9 meses	665,70
Interés por 3 meses	8,32
Saldo en la fecha de vencimiento	674,02

En este caso, cada pago parcial excede el interés vencido en la fecha del pago parcial.

Véase, además, el problema 1.

EN COMPRAS A PLAZOS, el comprador hace un pago inicial por los objetos comprados y se compromete hacer un número determinado de pagos parciales semanales o mensuales.

Ejemplo 3.

Un piano con valor de \$600 es vendido mediante un pago inicial de \$100 y 10 abonos mensuales de \$50, más intereses de 6% sobre el saldo insoluto. Después del pago inicial, el saldo insoluto es 600 — 100 = \$500. El primer pago mensual es $50 + 500(0{,}06)(1/12) = \$52{,}50$. El saldo insoluto es ahora de 500 — 50 = \$450 y el segundo pago mensual es $50 + 450(0{,}06)(1/12) = \$52{,}25$. Obsérvese que el interés cargado decrece en \$0,25 cada mes. (¿Por qué?) El tercer pago mensual es \$52 y el último (el décimo) es $50 + 50(0{,}06)(1/12) = \$50{,}25$.

La suma total pagada por el comprador es

$$\begin{aligned} S &= 100 + (52{,}50 + 52{,}25 + \cdots + 50{,}25) \\ &= 100 + \frac{10}{2}(52{,}50 + 50{,}25) = 100 + 513{,}75 = \$613{,}75\ , \end{aligned}$$

siendo la suma dentro del paréntesis la suma de una progresión aritmética de 10 términos. En consecuencia, el comprador paga 613,75 — 600 = \$13,75 por el privilegio de no pagar de contado en la fecha de la compra. Está claro que el cargo por intereses es a la tasa del 6%.

Frecuentemente, el cargo adicional por el privilegio de no pagar el importe total el día de la compra, se le suma al saldo insoluto en ese día y esta cantidad es pagada mediante una serie de pagos semanales o mensuales iguales.

Ejemplo 4.

Un radio se vende en \$63 de contado o mediante un pago inicial de \$8 y 12 pagos semanales de \$5 cada uno. En este caso, el saldo insoluto el día de la compra es 63 — 8 = \$55 y el cargo por pago en abonos es $(12 \times 5) - 55 = \$5$.

Aunque el cargo por pago en abonos incluye ciertos costos, tales como la contabilidad y la investigación del crédito, es costumbre considerar dicho cargo como un cargo por intereses. El problema de determinar la tasa de interés cargada en una transacción del tipo mencionado pertenece a un capítulo posterior (véase el capítulo 10). En este capítulo, daremos algunas fórmulas simples que son utilizadas para aproximar las tasas. Para este objeto,

n = el número de pagos excluyendo el pago inicial
m = el número de pagos en un año
i = tasa de interés anual
R = el pago periódico
B = el saldo debido = valor de contado — cuota inicial
I = $Rn - B$ = cargo por pago en abonos = cargo por intereses.

Fórmula residual o comercial

Suponiendo que los pagos parciales R se utilizan en primer lugar para el pago del saldo insoluto B y, además, para el pago del cargo por intereses I, determinamos (véase el problema 7) la tasa de interés como

$$i = \frac{2mI}{B(n+1) - I(n-1)} \tag{1}$$

Se demostrará en el problema 10 que (*1*) involucra el mismo principio de la regla comercial discutida anteriormente.

Ejemplo 5.

El precio de un televisor es \$349,95 de contado. Puede ser pagado con \$49,95 iniciales y 10 mensualidades de \$35 cada una. Mediante el uso de la fórmula comercial, hallar la tasa de interés cargada.

En este caso, $n = 10$, $m = 12$, $R = 35$, $B = 349{,}95 - 49{,}95 = 300$, $I = Rn - B = 35(10) - 300 = 50$.
Por tanto,

$$i = \frac{2(12)(50)}{300(11) - 50(9)} = \frac{8}{19} = 0{,}421 \text{ o sea } 42{,}1\%$$

Fórmula de razón constante

Bajo la suposición de que cada pago R se utiliza para el pago de parte del saldo insoluto y para el pago de intereses, en la misma razón del saldo insoluto original B al cargo por interés I, encontramos (véase el problema 8) que la tasa de interés es

$$i = \frac{2mI}{B(n+1)} \tag{2}$$

Ejemplo 6.

Resolver el ejemplo 5, aplicando la fórmula de razón constante.

$$i = \frac{2(12)(50)}{300(11)} = \frac{4}{11} = 0{,}364 \text{ o sea } 36{,}4\%$$

Fórmula de serie de pagos

Con la suposición de que la suma de los valores presentes en la fecha de la compra, de la secuencia de pagos R a la tasa de *descuento simple d%*, es el saldo insoluto B, tenemos que (véase el problema 9)

$$d = \frac{2mI}{Rn(n+1)} \tag{3}$$

Ejemplo 7.

Resolver el ejemplo 5 utilizando la fórmula de serie de pagos

$$d = \frac{2(12)(50)}{35(10)(11)} = \frac{24}{77} = 0{,}312 \text{ o sea } 31{,}2\%$$

Fórmula de razón directa

Una fórmula más precisa

$$i = \frac{6mI}{3B(n+1) + I(n-1)} \tag{4}$$

es debida a H. E. Stelson (véase "The American Mathematical Monthly", vol. 56, pág. 257-261).

Ejemplo 8.

Resolver el ejemplo 5 aplicando la fórmula de razón directa.

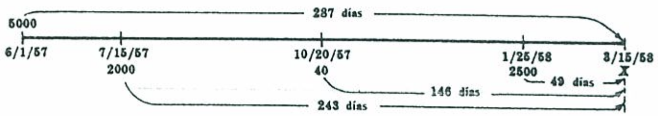
$$i = \frac{6(12)(50)}{3(300)(11) + 50(9)} = \frac{8}{23} = 0{,}348 \text{ o sea } 34{,}8\%$$

Véanse los problemas 2-6.

Problemas resueltos

1. El 1o. de junio de 1969 M pidió un préstamo de \$5000 al 6%. Pagó \$2000 el 15 de julio de 1969, \$40 el 20 de octubre de 1969 y \$2500 el 25 de enero de 1970. ¿Cuál es el saldo vencido el 15 de marzo de 1970 calculado mediante, (*a*) la regla comercial, y (*b*) la regla de los Estados Unidos?

(*a*) De una línea de tiempo, tomando como fecha focal el 15 de marzo de 1970 y como X el saldo requerido, tenemos:



$$X + 2500\left[1 + 0{,}06\left(\frac{49}{360}\right)\right] + 40\left[1 + 0{,}06\left(\frac{146}{360}\right)\right]$$

$$+ 2000\left[1 + 0{,}06\left(\frac{243}{360}\right)\right] = 5000\left[1 + 0{,}06\left(\frac{287}{360}\right)\right]$$

$$X + 2520{,}42 + 40{,}97 + 2081{,}00 = 5239{,}17 \quad \text{y} \quad X = \$596{,}78$$

(*b*)

Deuda el 1o. de junio de 1969	\$5000,00
Interés del 1o. de junio al 15 de julio (44 días)	36,67
Cantidad vencida el 15 de julio de 1969	5036,67
Pago del 15 de julio de 1969	2000,00
Saldo insoluto el 15 de julio de 1969	3036,67
El interés del 15 de julio al 20 de octubre (97 días), es \$49,09. Por ser el pago de \$40 menor que el cargo por interés se toma en cuenta hasta el siguiente pago, sin intereses.	
Interés del 15 de julio de 1969 al 25 de enero de 1970 (194 días)	98,19
Cantidad vencida el 25 de enero de 1970	3134,86
Pagos de \$40 y \$2500	2540,00
Saldo el 25 de enero de 1970	594,86
Interés del 25 de enero al 15 de marzo (49 días)	4,86
Cantidad vencida el 15 de marzo de 1970	\$ 599,72

2. Un automóvil usado se ofrece en \$600 de contado o \$100 iniciales y 9 mensualidades de \$60 cada una. Determinar, aproximadamente, la tasa de interés cargada mediante, (*a*) la fórmula comercial, (*b*) la fórmula de razón constante, y (*c*) la fórmula de razón directa.

Tenemos que $n = 9$, $m = 12$, $R = 60$, $B = 600 - 100 = 500$, $I = Rn - B = 60(9) - 500 = 40$.

(*a*) $i = \dfrac{2mI}{B(n+1) - I(n-1)} = \dfrac{2(12)(40)}{500(10) - 40(8)} = 0{,}205$ o sea 20,5%

(*b*) $i = \dfrac{2mI}{B(n+1)} = \dfrac{2(12)(40)}{500(10)} = 0{,}192$ o sea 19,2%

(*c*) $i = \dfrac{6mI}{3B(n+1) + I(n-1)} = \dfrac{6(12)(40)}{3(500)(10) + 40(8)} = 0{,}188$ o sea 18,8%

3. Determinar la tasa aproximada de descuento simple cargada en el problema 2, aplicando la fórmula de serie de pagos.

$$d = \frac{2mI}{Rn(n+1)} = \frac{2(12)(40)}{60(9)(10)} = 0{,}178 \text{ o sea } 17{,}8\%$$

4. Un automóvil con precio de \$3085 es vendido con \$585 de cuota inicial. El saldo se pagará mediante una serie de pagos mensuales con intereses de 6% anual sobre el saldo inicial. Hallar el importe del pago mensual y de la tasa de interés cargada si en total se harán 18 pagos iguales aplicando, (*a*) la fórmula de razón constante, y (*b*) la fórmula de razón directa.

El cargo por intereses es simplemente el interés sobre el saldo insoluto inicial, al 6%, por 18 meses. Tenemos que $n = 18$, $m = 12$, $B = 3085 - 585 = 2500$, $I = 2500(0{,}06)(3/2) = 225$.

Utilizando $I = Rn - B$, el pago mensual es $R = \dfrac{B+I}{n} = \dfrac{2500 + 225}{18} = \$151{,}39$.

(*a*) $i = \dfrac{2mI}{B(n+1)} = \dfrac{2(12)(225)}{2500(19)} = 0{,}114$ o sea 11,4%

(*b*) $i = \dfrac{6mI}{3B(n+1) + I(n-1)} = \dfrac{6(12)(225)}{3(2500)(19) + 225(17)} = 0{,}111$ o sea 11,1%

5. Una tienda ofrece un motor eléctrico en \$34 de contado o \$5 iniciales y 10 pagos semanales de \$3. Hallar la tasa de interés cargada usando la fórmula de razón directa.

Tenemos que $n = 10$, $m = 52$, $R = 3$, $B = 34 - 5 = 29$, $I = Rn - B = 3(10) - 29 = 1$. Por tanto,

$$r = \frac{6mI}{3B(n+1) + I(n-1)} = \frac{6(52)(1)}{3(29)(11) + 1(9)} = 0{,}323 \text{ o sea } 32{,}3\%$$

6. Una empresa financiera carga el 2% mensual sobre préstamos de \$500 o menos. Usando la fórmula de razón directa, hallar la tasa de interés cargada sobre un préstamo de \$500, si éste será pagado mediante 24 pagos mensuales iguales.

En este caso $n = 24$, $m = 12$, $B = 500$, $I = 500(0{,}02)24 = 240$, por tanto,

$$i = \frac{6mI}{3B(n+1) + I(n-1)} = \frac{6(12)(240)}{3(500)(25) + 240(23)} = 0{,}402 \text{ o sea } 40{,}2\%$$

7. Deducir la fórmula comercial $i = \dfrac{2mI}{B(n+1) - I(n-1)}$.

Designemos con i la tasa de interés simple cargada y con m el número de abonos en un año. Con la suposición de que cada abono R se utiliza en primer lugar para pagar el saldo insoluto B y después para pagar el cargo por interés I, la secuencia de los saldos insolutos es

$$B,\ B-R,\ B-2R,\ \ldots,\ B-(n-1)R$$

Como el deudor utiliza cada uno de estos saldos por un intervalo de pago, esto es, por $1/m$ de año, el interés total cargado es

$$\begin{aligned} I &= B(i)(1/m) + (B-R)(i)(1/m) + (B-2R)(i)(1/m) + \cdots + \big(B-(n-1)R\big)(i)(1/m) \\ &= \frac{i}{m}\Big[B + (B-R) + (B-2R) + \cdots + \big(B-(n-1)R\big)\Big] \end{aligned}$$

La expresión dentro de los paréntesis rectangulares es la suma de una progresión aritmética de n términos, por tanto

$$I = \frac{i}{m}\cdot\frac{n}{2}[B + B - (n-1)R] = \frac{i}{m}\cdot\frac{n}{2}[2B - (n-1)R]$$

$$\begin{aligned} i &= \frac{2mI}{n[2B-(n-1)R]} = \frac{2mI}{2Bn - Rn^2 + Rn} \\ &= \frac{2mI}{(Bn+B) - (Rn^2 - Bn - Rn + B)} = \frac{2mI}{B(n+1) - (Rn-B)(n-1)} \\ &= \frac{2mI}{B(n+1) - I(n-1)} \end{aligned}$$

8. Deducir la fórmula de razón constante $i = \dfrac{2mI}{B(n+1)}$.

Con la suposición de que cada pago parcial R consiste, en parte del pago del saldo insoluto y del interés por pago en cuotas en la misma razón que el saldo insoluto original B es al interés I; cada pago R reduce el saldo insoluto en B/n. (Nótese que de la relación $I = Rn - B$, tenemos que: $R = \dfrac{B}{n} + \dfrac{I}{n}$ y la razón de $\dfrac{B}{n}$ a $\dfrac{I}{n}$ es la razón de B a I.) La secuencia de los saldos insolutos es

$$B,\quad B - \frac{B}{n},\quad B - 2\frac{B}{n},\quad \ldots,\quad B - (n-1)\frac{B}{n}$$

y como en el problema 7,

$$I = \frac{i}{m}\left[B + \left(B - \frac{B}{n}\right) + \left(B - 2\frac{B}{n}\right) + \cdots + \left(B - (n-1)\frac{B}{n}\right)\right]$$

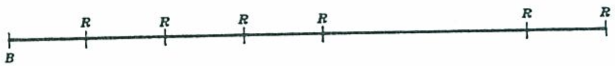
$$= \frac{i}{m}\cdot\frac{n}{2}\left[2B - (n-1)\frac{B}{n}\right] = \frac{i}{m}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{B(n+1)}{n} = \frac{i}{2m}[B(n+1)]$$

y

$$i = \frac{2mI}{B(n+1)}$$

9. Deducir la fórmula de serie de pagos, $d = \dfrac{2mI}{Rn(n+1)}$.

Designemos con d la tasa de descuento simple y con m el número de períodos de pago en un año. Con la suposición de que la suma de los valores presentes de los pagos parciales R en la fecha de la compra es igual al saldo insoluto B, tenemos



$$B = R\left(1 - \frac{d}{m}\right) + R\left(1 - 2\frac{d}{m}\right) + R\left(1 - 3\frac{d}{m}\right) + \cdots + R\left(1 - n\frac{d}{m}\right)$$

$$= R\cdot\frac{n}{2}\left[2 - (n+1)\frac{d}{m}\right] = \frac{Rn}{2}\cdot\frac{2m - (n+1)d}{m}$$

De donde,

$$2Bm = 2Rnm - Rn(n+1)d$$

$$Rn(n+1)d = 2Rnm - 2Bm = 2m(Rn - B) = 2mI$$

y

$$d = \frac{2mI}{Rn(n+1)}$$

10. Deducir la fórmula comercial $i = \dfrac{2mI}{B(n+1) - I(n-1)}$, aplicando la regla comercial.

Suponemos que se necesitan n pagos periódicos de R cada uno para saldar el saldo insoluto B, con interés simple de i/m, por cada intervalo de pago. De acuerdo con

la regla comercial, tomamos la fecha del último pago parcial como fecha focal y escribimos la ecuación de valor

$$B\left[1 + n\frac{i}{m}\right] = R\left[1 + (n-1)\frac{i}{m}\right] + R\left[1 + (n-2)\frac{i}{m}\right] + \cdots + R\left[1 + \frac{i}{m}\right] + R$$

por tanto,

$$B + B\frac{ni}{m} = nR + \frac{n(n-1)}{2}R\frac{i}{m}$$

y

$$\frac{ni}{m}\left[B - R\frac{(n-1)}{2}\right] = nR - B = I$$

tenemos ahora

$$\frac{ni}{m}\left[\frac{2B - Rn + R}{2}\right] = \frac{ni}{m}\left[\frac{B - I + R}{2}\right] = \frac{ni}{2m}\left(B - I + \frac{I+B}{n}\right)$$

$$= \frac{i}{2m}(Bn - In + I + B) = \frac{i}{2m}[B(n+1) - I(n-1)] = I$$

de donde

$$i = \frac{2mI}{B(n+1) - I(n-1)}$$

Problemas propuestos

11. Aplicando, (*a*) la regla comercial, y (*b*) la regla de los Estados Unidos, hallar el saldo en la fecha de vencimiento de un documento de \$7500 a 10 meses al 6% si es reducido mediante dos pagos iguales de \$2500 cada uno, efectuados 4 meses y 7 meses antes de la fecha de vencimiento. *Resp.* (*a*) \$2737,50, (*b*) \$2742,97

12. Una deuda de \$3000 con intereses al 6%, vence en 9 meses. Si se pagan \$1000 después de 4 meses y \$1200 tres meses más tarde, hallar el saldo insoluto en la fecha de vencimiento aplicando, (*a*) la regla comercial, y (*b*) la regla de los Estados Unidos. *Resp.* (*a*) \$898,00, (*b*) \$899,81

13. El firmante de un documento a 180 días por \$5000, con intereses al 5%, fechado el 10 de marzo de 1969, paga \$1500 el 6 de mayo de 1969; \$750 el 20 de junio de 1969 y \$1000 el 19 de agosto de 1969. Hallar el saldo insoluto en la fecha de vencimiento, aplicando, (*a*) la regla comercial, y (*b*) la regla de los Estados Unidos. *Resp.* (*a*) \$1838,76, (*b*) \$1839,72

14. M pide a un banco un préstamo de \$8000 por 8 meses, al 5%. Al término de 2 meses paga \$4000 y al término de 6 meses desea pagar el saldo insoluto. ¿Cuánto tendrá que pagar de acuerdo con la regla de los Estados Unidos? *Resp.* \$4134,45

15. Una persona da \$3600 de cuota inicial por la compra de una casa cuyo precio es de \$10.000. Posteriormente pagará \$1000 al final de cada trimestre durante 3 trimestres. Hallar el saldo insoluto al final del año aplicando la regla de los Estados Unidos y suponiendo intereses al 8%. *Resp.* \$3805,96

Resolver los problemas 16-20 para i o d aplicando, (*a*) la fórmula comercial, (*b*) la fórmula de razón constante, (*c*) la fórmula de serie de pagos, y (*d*) la fórmula de razón directa.

16. Un radio marcado para su venta en \$74,95, es vendido en abonos mediante \$9,95 iniciales y 10 pagos semanales de \$6,75 cada uno.
Sugerencia. $n = 10$, $m = 52$, $R = 6{,}75$, $B = 65$, $I = 2{,}50$.
Resp. (*a*) 37,5%, (*b*) 36,4%, (*c*) 35,0%, (*d*) 36,0%

17. Un congelador de \$475 se ofrece mediante cuota inicial de \$175 y el saldo en 11 pagos mensuales de \$30 cada uno.
Sugerencia. $n = 11$, $m = 12$, $R = 30$, $B = 300$, $I = 30$.
Resp. (*a*) 21,8%, (*b*) 20,0%, (*c*) 18,2%, (*d*) 19,5%

18. Una lavadora cuyo precio de contado es \$199,95, se vende con \$19,95 de cuota inicial. El saldo se pagará mediante 10 pagos mensuales iguales calculados con interés global de 6% anual.
Resp. (*a*) 11,4%, (*b*) 10,9%, (*c*) 10,4%, (*d*) 10,8%

19. Una compañía de ventas por catálogo carga 10% sobre el precio de contado cuando la venta se efectúa a plazos. Se requiere una cuota inicial de una tercera parte y la diferencia en 12 mensualidades iguales. Supóngase un precio de contado de \$300. *Resp.* (*a*) 33,6%, (*b*) 29,1%, (*c*) 25,2%, (*d*) 27,9%

20. El valor de contado de una bicicleta es \$3050. M debía pagar \$750 de cuota inicial por la bicicleta usada pero pagó \$500. Acordó pagar el saldo en 15 meses al 6% de interés global.

21. Aplicar la fórmula de razón constante, para obtener la tasa aproximada de interés pagada en cada una de las siguientes operaciones:

	Préstamo	Intereses	Número de pagos mensuales iguales
(*a*)	\$ 400	7% del préstamo	12
(*b*)	\$ 800	8% del préstamo	15
(*c*)	\$1000	10% del préstamo	18

Resp. (*a*) 12,9%, (*b*) 12,0%, (*c*) 12,6%

22. Aplicar la fórmula de razón directa para obtener la tasa de interés pagada sobre los préstamos del problema 21. *Resp.* (*a*) 12,7%, (*b*) 11,7%, (*c*) 12,3%

23. Aplicar $i = \dfrac{d}{1-dt}$, (véase el problema 21 del capítulo 5) para obtener la tasa equivalente de interés en cada uno de los problemas 16(*c*)-20(*c*). *Resp.* 16(*c*) 37,5%, 17(*c*) 21,8%, 18(*c*) 11,4%, 19(*c*) 33,7%, 20(*c*) 12,1%

24. Suponiendo que el saldo insoluto B más los intereses por pago de abonos I, serán saldados mediante $(n-1)$ pagos iguales más un pago irregular Z en el último período. De acuerdo con la fórmula de razón constante, cada pago de $\dfrac{B+I-Z}{n-1}$ se aplica para el pago del saldo insoluto $B_1 = \dfrac{B(B+I-Z)}{(n-1)(B+I)}$ y para el pago del interés $\dfrac{I(B+I-Z)}{(n-1)(B+I)}$. Mediante el procedimiento del problema 8, obtener $i = \dfrac{2mI(B+I)}{Bn(B+I+Z)}$ como la tasa de interés cargada.

25. Un radio se vende en \$29,95 de contado o mediante \$9,95 iniciales y \$4 semanales por las próximas 5 semanas y un pago de \$2 una semana después. Determinar la tasa de interés aproximada cargada. *Resp.* 158,9%

26. Una máquina se vende en \$225 de contado o mediante \$100 de cuota inicial, 10 pagos mensuales de \$15 cada uno y un pago final de \$5 un mes después. Determinar la tasa aproximada de interés cargada. *Resp.* 50,7%

Capítulo 7

Interés compuesto

INTERES COMPUESTO. En aquellas transacciones que abarcan un período largo de tiempo, el interés puede ser manejado de dos maneras:

(1) A intervalos establecidos, el interés vencido se paga mediante cheque o cupones. El capital que produce los intereses permanece sin cambio durante el plazo de la transacción. En este caso, estamos tratando con interés simple (véase el capítulo 4).

(2) A intervalos establecidos, el interés vencido es agregado al capital (por ejemplo, en las cuentas de ahorro). En este caso, se dice que el interés es *capitalizable*, o *convertible* en capital y, en consecuencia, también gana interés. El capital aumenta periódicamente y el interés convertible en capital también aumenta periódicamente durante el período de la transacción. La suma vencida al final de la transacción es conocida como *monto compuesto*. A la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le conoce como *interés compuesto*.

Ejemplo 1.

(*a*) Hallar el interés simple sobre \$1000 por 3 años al 5% de interés simple. (*b*) Hallar el interés compuesto sobre \$1000 por 3 años si el interés de 5% es convertible anualmente en capital.

(*a*) $I = Cit = 1000(0{,}05)3 = \$150{,}00$

(*b*) El capital original es \$1000.

El interés por un año es 1000(0,05) = \$50	
El capital al final del primer año es	1000 + 50 = \$1050.
El interés sobre el nuevo capital por un año es	1050(0,05) = \$52,50.
El capital al final del segundo año es	1050 + 52,50 = \$1102,50.
El interés sobre el nuevo capital por un año es	1102,50(0,05) = \$55,12.
El capital al final del tercer año es	1102,50 + 55,12 = \$1157,62.

El interés compuesto es 1157,62 — 1000 = \$157,62

El interés puede ser convertido en capital anualmente, semestralmente, trimestralmente, mensualmente, etc. El número de veces que el interés se convierte en un año se conoce como *frecuencia de conversión*. El período de tiempo entre dos conversiones sucesivas se conoce como período de *interés* o *conversión*. La tasa de interés se establece normalmente como tasa anual. Por "interés al 6%" se entiende que el 6% se convierte anualmente; de otra forma, la frecuencia de conversión se indica expresamente, esto es, 4% convertible semestralmente, 5% convertible trimestralmente, etc.

En problemas que implican interés compuesto, tres conceptos son importantes: (*a*) el capital original, (*b*) la tasa de interés por período y (*c*) el número de períodos de conversión durante todo el plazo de la transacción.

Ejemplo 2.

Una cierta cantidad es invertida durante $8\frac{1}{2}$ años al 7% convertible trimestralmente. El período de conversión es 3 meses; la frecuencia de conversión es 4. La tasa de interés por período de conversión es

$$\frac{\text{tasa anual de interés}}{\text{frecuencia de conversión}} = \frac{0,07}{4} = 0,0175 \text{ ó } 1\tfrac{3}{4}\%$$

El número de períodos de conversión es

$$(\text{número dado de años})(\text{frecuencia de conversión}) = 8\tfrac{1}{2} \times 4 = 34$$

Véanse los problemas 1-2.

EL MONTO COMPUESTO. Sea un capital C invertido a la tasa i por período de conversión y designemos con S al monto compuesto de C al final de n períodos de conversión. Puesto que C produce Ci de interés durante el primer período de conversión, al final de dicho período produce a $C + Ci = C(1 + i)$. En otras palabras, el monto de un capital al final de un período de conversión se obtiene multiplicando el capital por el factor $(1 + i)$. En consecuencia, al final del segundo período de conversión el capital es $C(1 + i)\cdot(1 + i) = C(1 + i)^2$; al final del tercer período de conversión, el monto es $C(1 + i)^2\cdot(1 + i) = C(1 + i)^3$ y así sucesivamente. La sucesión de montos

$$C(1+i),\ C(1+i)^2,\ C(1+i)^3\ \ldots$$

forma una progresión geométrica cuyo n-ésimo término es

$$S = C(1+i)^n \qquad (1)$$

El factor $(1 + i)^n$ es el *monto compuesto* de 1 a la tasa i por período, por n períodos de conversión y será conocido como el *monto compuesto de 1*. Para una i y una n dadas, el monto compuesto puede ser obtenido mediante el teorema binomial utilizando logaritmos. En caso de tasas comunes de interés, el valor puede ser leído directamente de tablas preparadas específicamente (véase la tabla IV). Para el cálculo de S aproximado a centavos, utilizaremos únicamente tantos decimales como dígitos tenga C expresado en centavos. Este procedimiento en ocasiones causará un error de un centavo.

Ejemplo 3.

Si se invierten $1000 durante $8\frac{1}{2}$ años al 7% convertible trimestralmente, tenemos que, $C = 1000$, $i = 0,0175$, $n = 34$, y

$$S = C(1+i)^n = 1000(1,0175)^{34}$$
$$= 1000(1,803725) = \$1803,72 \qquad \text{(tabla IV)}$$

El interés compuesto es $1803,72 - 1000 = \$803,72$.

Ejemplo 4.

El 20 de marzo de 1945, se invirtieron $200 en un fondo que pagaba el 5% convertible semestralmente. ¿Cuál era el importe del fondo el 20 de septiembre de 1961?

$C = 200$, $i = 0,025$, $n = 33$ y

$$S = C(1+i)^n = 200(1,025)^{33} = 200(2,25885) = \$451,77 \qquad \text{(tabla IV)}$$

Véanse los problemas 3-7.

Para el caso en que n excede la tabla, véase el problema 8.

MONTO COMPUESTO CON PERIODOS DE CONVERSION FRACCIONARIOS. La fórmula (1) se deriva con la suposición de que n es entero. En teoría puede ser aplicable para n entero o fraccionario. Al evaluar la fórmula cuando n es fraccionario, en ocasiones se utilizarán las tablas IV y VI; en otros casos será necesario utilizar logaritmos.

Ejemplo 5.

Hallar el monto compuesto (teórico) de $3000 en 6 años 3 meses, al 5%.

En este caso $C = 3000$, $i = 0,05$ y $n = 25/4$; por tanto

$$S = 3000(1,05)^{25/4} = 3000(1,05)^6(1,05)^{1/4}$$
$$= 3000(1,340096)(1,012272) = \$4069,63 \qquad \text{(tablas IV y VI)}$$

En la práctica, raramente se aplica el procedimiento anterior. En su lugar se determina el monto compuesto correspondiente a los períodos completos de conversión y se aumenta con interés simple por el período fraccionario de conversión a la tasa anual estipulada. A menos que se diga otra cosa, deberá entenderse en futuras aplicaciones que este último sistema será el utilizado.

Ejemplo 6.

Resolver el ejem [illegible] interés simple en el período de conversión fraccionario.

Aplicamos interés compuesto por 6 períodos (años) e interés simple sobre el monto compuesto por $\frac{1}{4}$ de año, es decir,

$$S = 3000(1,05)^6[1 + 0,05(\tfrac{1}{4})]$$
$$= 3000(1,340096)(1,0125) = \$4070,54$$

Nota. Esta regla es más práctica para simplificar los cálculos; produce un resultado ligeramente mayor que la regla teórica.

Véanse los problemas 10-11.

TASAS NOMINAL Y EFECTIVA DE INTERES. Se dice que dos tasas anuales de interés con diferentes períodos de conversión son *equivalentes* si producen el mismo interés compuesto al final de un año.

Ejemplo 7.

Al final de un año, el monto compuesto de $100 al

(*a*) 4% convertible trimestralmente es $100(1,01)^4 = \$104,06$

(*b*) 4,06% convertible anualmente es $100(1,0406) = \$104,06$

Por tanto, 4% convertible trimestralmente y 4,06% convertible anualmente son tasas equivalentes.

Cuando el interés es convertible más de una vez en un año, la tasa anual dada se conoce como *tasa nominal anual* o simplemente *tasa nominal*. La tasa de interés efectivamente ganada en un año se conoce como *tasa efectiva anual* o como *tasa efectiva*. En el ejemplo 7 (*a*), 4% es la tasa nominal mientras que en (*b*) 4,06 es la tasa efectiva. Como se mostró, 4,06 es la tasa efectiva equivalente a una tasa nominal de 4% convertible trimestralmente.

Ejemplo 8.

Hallar la tasa efectiva de interés i equivalente a una tasa nominal de 5% convertible mensualmente.

En un año, el monto de 1 a la tasa efectiva i será $1 + i$ y al 5% convertible mensualmente será $(1 + 0,05/12)^{12}$

Haciendo
$$1 + i = (1 + 0,05/12)^{12}$$

vemos que

$$i = (1 + 0,05/12)^{12} - 1$$
$$= 1,05116190 - 1 = 0,05116190 \text{ o sea } 5,116\%$$

Ejemplo 9.

Hallar la tasa nominal j convertible trimestralmente equivalente a una tasa efectiva de 5%.

En un año, el monto de 1 a la tasa j convertible trimestralmente es $(1 + j/4)^4$ y al 5% efectivo es 1,05. Haciendo

$$(1 + j/4)^4 = 1{,}05$$

vemos que

$$1 + j/4 = (1{,}05)^{1/4}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} j &= 4[(1{,}05)^{1/4} - 1] \\ &= 4(0{,}01227223) = 0{,}04908892 \text{ o sea } 4{,}909\% \end{aligned}$$

Nota. Ciertos autores definen y tabulan valores de

$$j_p(\text{a la tasa } i) = p[(1 + i)^{1/p} - 1]$$

En el ejemplo anterior escribirían $j = j_4$(al 0,05) y el valor podría leerse directamente de tablas.

Véanse los problemas 12-14.

APROXIMACION DE LA TASA DE INTERES. Dados C, S y n en la ecuación (I), i puede ser aproximada ya sea interpolando en la tabla IV o utilizando logaritmos.

Ejemplo 10.

¿A qué tasa nominal j convertible semestralmente el monto de \$100 será \$215 en $15\frac{1}{2}$ años?

En este caso $C = 100$, $S = 215$, $n = 31$. Sea $i = j/2$; de la ecuación (I) tenemos,

$$215 = 100(1+i)^{31} \quad \text{y} \quad (1+i)^{31} = \frac{215}{100} = 2{,}1500$$

En la tabla IV encontramos que $(1{,}025)^{31} = 2{,}15000677$, por lo cual $i = 0{,}025$ y $j = 2i = 0{,}05$ o sea 5%.

Ejemplo 11.

¿A qué tasa nominal j convertible trimestralmente, el monto de \$1250 será \$1900 en 10 años?

En este caso $C = 1250$, $S = 1900$, $n = 40$; de (I) tenemos que,

$$1900 = 1250(1+i)^{40} \quad \text{y} \quad (1+i)^{40} = \frac{1900}{1250} = 1{,}5200$$

Aproximando a cuatro decimales las cifras de la tabla IV, tenemos que $(1{,}01)^{40} = 1{,}4889$ y $(1{,}0125)^{40} = 1{,}6436$, cercano a 1,5200. Vemos claramente que la tasa i buscada debe estar entre 1% y $1\frac{1}{4}$% estando más cerca de 1%. Ahora, coloquemos a continuación junto a cada paréntesis rectangular la diferencia de las dos cantidades indicadas. (En este caso escribimos $i - 0{,}01 = x$.)

$$0{,}0025\left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}0{,}01 \\ i\end{array}\right] x \\ 0{,}0125 \end{array}\right. \qquad 0{,}1547\left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}1{,}4889 \\ 1{,}5200\end{array}\right] 0{,}0311 \\ 1{,}6436 \end{array}\right.$$

De la proporción $\dfrac{x}{0{,}0025} = \dfrac{0{,}0311}{0{,}1547}$, encontramos que $x = \dfrac{0{,}0311}{0{,}1547}(0{,}0025) = 0{,}00050$, por tanto

$$i = 0{,}01 + x = 0{,}01050 \quad \text{y} \quad j = 4i = 0{,}0420 \text{ y } 4{,}20\%$$

Ejemplo 12.

Resolver el ejemplo 11, usando logaritmos.

De la igualdad $1900 = 1250(1 + i)^{40}$ tenemos

$$\log 1900 = \log 1250 + 40 \log (1 + i)$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \log (1 + i) &= \frac{\log 1900 - \log 1250}{40} = \frac{3{,}278754 - 3{,}096910}{40} \\ &= 0{,}004546 \end{aligned}$$

De donde

$$1+i = 1{,}01052 \qquad i = 0{,}01052 \qquad \text{y} \qquad j = 4i = 0{,}04208 \text{ o sea } 4{,}208\%$$

Véase el problema 15.

APROXIMACION DEL TIEMPO. Conocidos C, S e i, el tiempo n de la fórmula (I) puede ser calculado interpolando en la tabla IV o aplicando logaritmos.

Ejemplo 13.

¿En qué tiempo el monto de \$2000 será \$3650 al 4% convertible semestralmente?

$C = 2000$, $S = 3650$, $i = 0{,}02$; de la fórmula (I) tenemos

$$3650 = 2000(1{,}02)^n \quad \text{y} \quad (1{,}02)^n = \frac{3650}{2000} = 1{,}8250$$

En la tabla IV, encontramos

$$(1{,}02)^{30} = 1{,}81136158 \quad \text{y} \quad (1{,}02)^{31} = 1{,}84758882$$

es decir, que el tiempo requerido está entre 30 y 31 períodos de conversión, o sea entre 15 y $15\frac{1}{2}$ años. Si el interés se carga por períodos completos, únicamente, el tiempo es $15\frac{1}{2}$, existiendo un monto ligeramente mayor en la cuenta. Si el interés se carga por períodos de conversión fraccionarios, el tiempo puede ser estimado en forma similar a la del ejemplo 11. La información se manejará así:

$$1\left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}30 \\ n\end{array}\right] x \\ 31 \end{array}\right. \qquad 0{,}0362\left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}1{,}8114 \\ 1{,}8250\end{array}\right] 0{,}0136 \\ 1{,}8476 \end{array}\right.$$

De la relación $\dfrac{x}{1} = \dfrac{0{,}0136}{0{,}0362}$, $x = 0{,}38$ y $n = 30 + x = 30{,}38$, períodos de conversión. El tiempo es 15,19 años, aproximadamente.

Véase el problema 16.

Problemas resueltos

1. Una cierta cantidad es invertida por 6 años, 7 meses, al 6% convertible mensualmente. Hallar la tasa de interés i por período de conversión y el número de períodos n.

   El período de conversión es un mes; la frecuencia de conversión es 12. Por tanto, $i = 0{,}06/12 = 0{,}005$ o sea $\frac{1}{2}$% y $n = 6 \times 12 + 7 = 79$ períodos de conversión.

2. Una cierta cantidad es invertida al 8% convertible trimestralmente, del 10 de octubre de 1954 al 10 de enero de 1962. Hallar la tasa de interés i por período de conversión y el número de períodos n.

   El período de conversión es 3 meses; la frecuencia de conversión es 4. Por tanto, $i = 0{,}08/4 = 0{,}02$ o sea 2% y

	Año	Mes
	1962	1
Restando:	1954	10
	7	3

$$n = 7 \times 4 + 1 = 29 \text{ períodos de conversión}$$

3. X obtiene un préstamo de \$600 acordando pagar el capital con interés de 3% convertible semestralmente. ¿Cuánto debe al final de 4 años?

$C = 600,\ i = 0{,}015,\ n = 8$; por tanto,

$$S = C(1+i)^n = 600(1{,}015)^8 = 600(1{,}12649) = \$675{,}89$$

4. Acumular \$2500 por $5\frac{1}{4}$ años al 4% convertible mensualmente.

$C = 2500,\ i = 0{,}04/12 = 0{,}01/3,\ n = 63$; ya que

$$S = C(1+i)^n = 2500(1+0{,}01/3)^{63} = 2500(1{,}233247) = \$3083{,}12$$

Nota. Escribimos $i = 0{,}01/3$ puesto que de otra forma i sería un decimal ilimitado.

5. El 1o. de febrero de 1948, X obtuvo un préstamo de \$2000 al 5% convertible trimestralmente. ¿Cuánto debía el 1o. de agosto de 1960?

$C = 2000,\ i = 0{,}0125,\ n = 50$; ya que,

$$S = C(1+i)^n = 2000(1{,}0125)^{50} = 2000(1{,}861022) = \$3722{,}04$$

6. Seis años después de que X abrió una cuenta de ahorro con \$2500 ganando intereses al $2\frac{1}{2}$% convertible semestralmente, la tasa de interés fue elevada al 3% convertible semestralmente. ¿Cuánto había en la cuenta 10 años después del cambio en la tasa de interés?

En los primeros 6 años $C = 2500,\ i = 0{,}0125,\ n = 12$, y $S_1 = 2500(1{,}0125)^{12}$.

En los siguientes 10 años $C = 2500(1{,}0125)^{12},\ i = 0{,}015,\ n = 20$. Por tanto,

$$S = 2500(1{,}0125)^{12}(1{,}015)^{20} = 2500(1{,}160755)(1{,}346855) = \$3908{,}42$$

7. Acumular \$2000 por 6 años, al 4,2%, convertible trimestralmente.

$C = 2000,\ i = 0{,}0105,\ n = 24$ y $S = 2000(1{,}0105)^{24}$.

En este caso no nos sirve la tabla IV por lo cual S se determina usando logaritmos.

$$\begin{aligned}\log S &= \log 2000 + 24 \log 1{,}0105\\ &= 3{,}301030 + 0{,}108871 = 3{,}409901 \quad \text{y} \quad S = \$2569{,}80\end{aligned}$$

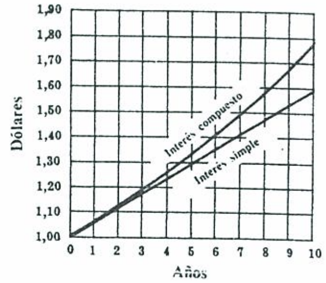
8. Hallar el monto compuesto de \$1000 por 20 años al 5%, convertible mensualmente.

$C = 1000,\ i = 0{,}05/12,\ n = 240$ y

$$\begin{aligned}S &= 1000(1+0{,}05/12)^{240}\\ &= 1000(1+0{,}05/12)^{150}(1+0{,}05/12)^{90}\\ &= 1000(1{,}865822)(1{,}453858) = \$2712{,}64\end{aligned}$$

9. La tabla dada a continuación, nos da el monto de \$1 a interés simple y a interés compuesto al 6%. El crecimiento comparativo se ilustra claramente en la gráfica adjunta.

Año	Monto a interés simple	Monto a interés compuesto
0	1,000	1,000
1	1,060	1,060
2	1,120	1,124
3	1,180	1,191
4	1,240	1,262
5	1,300	1,338
6	1,360	1,419
7	1,420	1,504
8	1,480	1,594
9	1,540	1,689
10	1,600	1,791



10. Hallar el monto compuesto teórico de, (*a*) \$500 por 7 años, dos meses; al $4\frac{1}{2}$%; (*b*) \$1500 por 6 años, 7 meses; al 5,2%, convertible semestralmente.

(*a*) $C = 500,\ i = 0{,}045,\ n = 43/6$, y

$$\begin{aligned}S &= 500(1{,}045)^{43/6} = 500(1{,}045)^7(1{,}045)^{1/6}\\ &= 500(1{,}36086)(1{,}00736) \qquad \text{(tablas IV y VI)}\\ &= \$685{,}44\end{aligned}$$

(*b*) $C = 1500,\ i = 0{,}026,\ n = 79/6$, y $S = 1500(1{,}026)^{79/6}$

$$\begin{aligned}\log S &= \log 1500 + \frac{79}{6}\log 1{,}026\\ &= 3{,}176091 + 0{,}146776 = 3{,}322867 \quad \text{y} \quad S = \$2103{,}10\end{aligned}$$

11. Hallar el monto compuesto de, (*a*) \$500 por 7 años, 2 meses al $4\frac{1}{2}$%, (*b*) \$1500 por 6 años, 7 meses al $5\frac{1}{2}$%, convertible semestralmente, aplicando la regla práctica.

(*a*) Utilizamos interés compuesto por 7 períodos de conversión e interés simple por dos meses, con lo cual

$$\begin{aligned}S &= 500(1{,}045)^7(1+0{,}045/6)\\ &= 500(1{,}36086)(1{,}0075) = \$685{,}53\end{aligned}$$

(*b*) Utilizamos interés compuesto por 13 períodos de conversión e interés simple por 1 mes, con lo cual

$$\begin{aligned}S &= 1500(1{,}026)^{13}(1+0{,}052/12) = 1500(1{,}026)^{13}(1{,}0043)\\ \log S &= \log 1500 + 13\log 1{,}026 + \log 1{,}0043\\ &= 3{,}176091 + 0{,}144911 + 0{,}001864 = 3{,}322866 \quad \text{y} \quad S = \$2103{,}10\end{aligned}$$

12. Hallar la tasa efectiva i equivalente a $j = 0{,}0525$ convertible trimestralmente.

En un año, el monto de 1 a la tasa i es $1 + i$ y a la tasa $j = 0{,}0525$ convertible trimestralmente es $(1{,}013125)^4$; igualando

$$1 + i = (1{,}013125)^4$$

encontramos

$$i = (1{,}013125)^4 - 1$$

Ahora

$$\log(1{,}0131)^4 = 4(0{,}0056523) = 0{,}022609$$

y

$$(1{,}0131)^4 = 1{,}0534$$

Por tanto

$$i = 0{,}0534 \text{ o sea } 5{,}34\%$$

13. Hallar la tasa nominal j, convertible mensualmente, equivalente al 6% convertible semestralmente.

En un año, el monto de \$1 a la tasa nominal j, convertible mensualmente, es $(1 + j/12)^{12}$ y al 6% convertible semestralmente es $(1,03)^2$. Haciendo

$$(1 + j/12)^{12} \;=\; (1,03)^2$$

encontramos

$$1 + j/12 \;=\; (1,03)^{1/6}$$

y

$$j \;=\; 12[(1,03)^{1/6} - 1] \;=\; 12[0,00493862] \;=\; 0,05926344 \text{ o sea } 5,926\%$$

14. Hallar la tasa nominal j, convertible semestralmente, equivalente al 4,2% efectivo.

En un año, el monto de \$1 a la tasa nominal j, convertible semestralmente, es $(1 + j/2)^2$ y al 4,2% efectivo es 1,042. Igualando

$$(1 + j/2)^2 \;=\; 1,042$$

tenemos

$$j \;=\; 2[(1,042)^{1/2} - 1]$$

Aplicando logaritmos, $\log(1,042)^{1/2} = \frac{1}{2}(0,0178677) = 0,0089338$ y $(1,042)^{1/2} = 1,02078$, por tanto

$$j \;=\; 2[1,02078 - 1] \;=\; 0,04156 \text{ o sea } 4,156\%$$

15. ¿A qué tasa nominal, convertible mensualmente, el monto de \$2000 será \$2650 en 6 años?

$C = 2000$, $S = 2650$, $n = 72$; por tanto,

$$2650 \;=\; 2000(1+i)^{72} \quad \text{y} \quad (1+i)^{72} \;=\; \frac{2650}{2000} \;=\; 1,3250$$

Utilizando la tabla IV, vemos que i se encuentra entre $\frac{1}{3}\%$ y $\frac{5}{12}\%$ estando más cerca de la última. En la siguiente disposición de cifras, haciendo $x = i - 0,01/3$, tenemos

$$0,01/12\left[\begin{array}{l} 0,01/3 \\ i \\ 0,05/12 \end{array}\right] x \qquad\qquad 0,0783\left[\begin{array}{l} 1,2707 \\ 1,3250 \\ 1,3490 \end{array}\right] 0,0543$$

$$\frac{x}{0,01/12} \;=\; \frac{0,0543}{0,0783}, \qquad x \;=\; \frac{0,0543}{0,0783}(0,01/12) \;=\; 0,00058$$

$$i \;=\; 0,01/3 + x \;=\; 0,00391$$

y

$$j \;=\; 12i \;=\; 12(0,00391) \;=\; 0,04692 \text{ o sea } 4,692\%$$

Aplicando logaritmos:

$$\log 2650 \;=\; \log 2000 + 72\log(1+i)$$

$$\log(1+i) \;=\; \frac{\log 2650 - \log 2000}{72} \;=\; \frac{3,423246 - 3,301030}{72} \;=\; 0,001697$$

Por tanto, $1 + i = 1,00392$, $i = 0,00392$, y $j = 0,04704$ o sea $4,704\%$.

16. ¿En qué tiempo el monto de \$2500 será \$3500 al 6% convertible trimestralmente?

$C = 2500$, $S = 3500$, $i = 0,015$; con lo cual

$$3500 \;=\; 2500(1,015)^n \quad \text{y} \quad (1,015)^n \;=\; \frac{3500}{2500} \;=\; 1,4000$$

Utilizando la tabla IV, vemos que n está entre 22 y 23. De la disposición de cifras que sigue, haciendo $x = n - 22$,

$$1\left[\begin{array}{l} 22 \\ n \\ 23 \end{array}\right] x \qquad\qquad 0,0208\left[\begin{array}{l} 1,3876 \\ 1,4000 \\ 1,4084 \end{array}\right] 0,0124$$

$$\frac{x}{1} \;=\; \frac{0,0124}{0,0208} \;=\; 0,60 \quad \text{y} \quad n \;=\; 22 + x \;=\; 22,60$$

El tiempo requerido es $22,60/4 = 5,65$ años, aproximadamente.

Aplicando logaritmos:

$$n\log(1,015) \;=\; \log 3500 - \log 2500$$

$$0,006466n \;=\; 3,544068 - 3,397940 \;=\; 0,146128$$

y

$$n \;=\; \frac{0,146128}{0,006466}$$

Para calcular el cociente con logaritmos, escribimos

$$n \;=\; \frac{14613}{647}$$

por tanto

$$\log n \;=\; \log 14613 - \log 647 \;=\; 4,164739 - 2,810904 \;=\; 1,353835$$

y $n = 22,59$. El tiempo requerido, como en el caso anterior, es 5,65 años.

Problemas propuestos

17. Hallar la tasa de interés i por período de conversión y el número n de períodos de conversión cuando se invierte un capital C:

(*a*) por 5 años al 4%.
(*b*) por 8 años al 5%.
(*c*) por 6 años al $4\frac{1}{2}\%$ convertible semestralmente.
(*d*) por 10 años al $3\frac{1}{2}\%$ convertible semestralmente.
(*e*) por $5\frac{1}{2}$ años al 4% convertible trimestralmente.
(*f*) por 6 años 9 meses, al 6% convertible trimestralmente.
(*g*) del 1o. de enero de 1960 al 1o. de julio de 1971 al 5% convertible semestralmente.
(*h*) del 15 de marzo de 1947 al 15 de septiembre de 1962, al $3\frac{1}{2}\%$ convertible semestralmente.
(*i*) del 18 de agosto de 1948 al 18 de febrero de 1957, al 6% convertible trimestralmente.
(*j*) del 20 de enero de 1955 al 20 de julio de 1962, al 6% convertible mensualmente.
(*k*) del 30 de septiembre de 1947 al 30 de marzo de 1963, al 3% convertible mensualmente.

Resp.
(*a*) $i = 0,4$, $n = 5$,
(*b*) $i = 0,05$, $n = 8$
(*c*) $i = 0,0225$, $n = 12$
(*d*) $i = 0,0175$, $n = 20$
(*e*) $i = 0,01$, $n = 22$
(*f*) $i = 0,015$, $n = 27$
(*g*) $i = 0,025$, $n = 23$
(*h*) $i = 0,0175$, $n = 31$
(*i*) $i = 0,015$, $n = 34$
(*j*) $i = 0,005$, $n = 90$
(*k*) $i = 0,0025$, $n = 186$

18. (*a*) Comparar el monto simple y el monto compuesto de \$100 por un año al 6%. Sacar conclusiones. (*b*) Comparar el monto simple y el monto compuesto de \$100 por 5 años al 6%. Sacar conclusiones.

19. Hallar el monto compuesto de \$100 al 5% por, (*a*) 10 años, (*b*) 20 años, (*c*) 30 años. En forma aproximada, ¿cuándo el monto compuesto es el doble del capital original? *Resp.* (*a*) \$162,89, (*b*) \$265,33, (*c*) \$432,19; después de 15 años

20. Hallar el monto compuesto de:
(*a*) \$750 por 6 años al 4% convertible semestralmente.
(*b*) \$750 por 6 años al 4% convertible trimestralmente.
(*c*) \$1500 por $8\frac{1}{4}$ años, al 3% convertible trimestralmente.
(*d*) \$1500 por 7 años, 8 meses, al 5% convertible mensualmente.
Resp. (*a*) \$951,18, (*b*) \$952,30, (*c*) \$1919,46, (*d*) \$2199,00

21. Un padre coloca \$500 en una cuenta de ahorros al nacer su hijo. Si la cuenta paga el $2\frac{1}{2}$% convertible semestralmente, ¿cuánto habrá, al cumplir 18 años el hijo? *Resp.* \$781,97

22. Se estima que un terreno boscoso, cuyo valor es de \$75.000, aumentará su valor cada año en 4% sobre el valor del año anterior durante 12 años. ¿Cuál será su valor al final de dicho plazo? *Resp.* \$120.077,42

23. Una póliza dotal de \$10.000 cuyo vencimiento fue el 1o. de mayo de 1962, fue dejada en la compañía de seguros al $3\frac{1}{2}$% convertible anualmente, ¿cuál fue su valor el 1o. de mayo de 1970? *Resp.* \$13.168,09

24. X desea un préstamo de \$2000 por 2 años. Le ofrecen el dinero al, (*a*) 5% convertible trimestralmente, (*b*) $5\frac{3}{8}$% convertible semestralmente, (*c*) $5\frac{1}{2}$% de interés simple. ¿Qué oferta debe aceptar? *Resp.* (*a*)

25. Acumular \$2000 por 6 años al 6,4% convertible semestralmente. *Resp.* \$2918,70

26. Acumular \$1500 por $7\frac{1}{2}$ años al 5,2% convertible trimestralmente. *Resp.* \$2209,90

27. Mediante la regla práctica, hallar el monto compuesto de:
(*a*) \$1000 por 8 años, 5 meses, al 4% convertible semestralmente. *Resp.* \$1395,67
(*b*) \$1500 por 6 años, 10 meses, al 5% convertible trimestralmente. *Resp.* \$2106,51

28. ¿Qué tasa convertible anualmente es equivalente al 6% convertible trimestralmente? *Resp.* 6,136%

29. Hallar la tasa nominal convertible trimestralmente equivalente al 5% convertible semestralmente. *Resp.* 4,969%

30. Hallar la tasa nominal convertible mensualmente equivalente al 5% convertible semestralmente. *Resp.* 4,949%

31. Hallar la tasa nominal convertible semestralmente a la cual el monto de \$2500 es \$3250 en 5 años. *Resp.* 5,312%

32. Hallar la tasa nominal convertible trimestralmente a la cual el monto de \$3500 es \$5000 en $5\frac{1}{4}$ años. *Resp.* 6,849%

33. Hallar la tasa nominal convertible mensualmente a la cual el monto de \$3250 es \$4000 en 8 años. *Resp.* 2,604%

34. ¿Cuántos años se necesitarán para que:
(*a*) \$1500 aumenten al doble, al 6% convertible trimestralmente?
(*b*) el monto de \$2500 sea \$6000 al 5% convertible semestralmente?
(*c*) el monto de \$4000 sea \$5000 al 4% convertible mensualmente?
(*d*) el monto de \$4000 sea \$7500 al 4,6% convertible trimestralmente?
Resp. (*a*) 11,64, (*b*) 17,73, (*c*) 5,59, (*d*) 13,74

Capítulo 8

Interés compuesto

Valor presente, ecuaciones de valor

EL VALOR PRESENTE a la tasa i, por período de conversión, de un monto S con vencimiento en n períodos de conversión es la suma C tal que invertida ahora a la tasa dada de interés alcanzaría el monto S después de n períodos de conversión. Del capítulo 7 tenemos,

$$S = C(1+i)^n$$

de donde,

$$C = S(1+i)^{-n} \qquad (1)$$

En la tabla V se dan valores para el *factor de descuento* $(1+i)^{-n}$, para diferentes tasas y plazos. Cuando no es aplicable la tabla V, deben utilizarse logaritmos.

Ejemplo 1.

Hallar el valor presente de \$2000, pagaderos en 6 años, suponiendo un rendimiento a la tasa de 5% convertible semestralmente.

$S = 2000$, $i = 0{,}025$, $n = 12$; de (*1*) tenemos

$$C = S(1+i)^{-n} = 2000(1{,}025)^{-12} = 2000(0{,}743556) = \$1487{,}11$$

Ejemplo 2.

Hallar el valor al 15 de febrero de 1965 de \$500 pagaderos el 15 de mayo de 1970, suponiendo un rendimiento al 4,4% convertible trimestralmente.

$S = 500$, $i = 0{,}011$, $n = 21$, por tanto

$$\begin{aligned} C &= 500(1{,}011)^{-21} \\ \log C &= \log 500 - 21 \log 1{,}011 \\ &= 2{,}698970 - 0{,}099775 = 2{,}599195 \\ \text{y} \quad C &= \$397{,}37 \end{aligned}$$

Véanse los problemas 1-3.

PARA HALLAR EL VALOR PRESENTE de un pagaré con intereses, hallar:
(*a*) el monto de la deuda al vencimiento,
(*b*) el valor presente del monto encontrado en (*a*).

Ejemplo 3.

Suponiendo una tasa de rendimiento efectivo de 4%, hallar el valor presente de una deuda de \$2500 contratada con intereses al 6% convertible trimestralmente, pagadera en 8 años.

(*a*) El valor al vencimiento es

$$S = 2500(1{,}015)^{32} = 2500(1{,}610324) = \$4025{,}81$$

(*b*) El valor presente de \$4025,81 pagaderos en 8 años, al 4% efectivo es

$$C = 4025{,}81(1{,}04)^{-8} = 4025{,}81(0{,}730690) = \$2941{,}62$$

Véase el problema 4.

VALOR PRESENTE PARA EL CASO DE UN PERIODO DE CONVERSION FRACCIONARIO. Cuando el tiempo es una parte fraccionaria del período de conversión, el valor presente puede ser encontrado en forma similar al caso del interés compuesto, mediante la regla teórica y la regla práctica.

Ejemplo 4.

Hallar el valor presente de $3000 pagaderos en 8 años 10 meses suponiendo un rendimiento de 4% convertible trimestralmente.

$S = 3000$, $i = 0{,}01$, $n = 106/3$; por tanto $C = 3000(1{,}01)^{-106/3}$.

Regla teórica. Haciendo uso de las tablas V y VII, tenemos

$$\begin{aligned} C &= 3000(1{,}01)^{-106/3} = 3000(1{,}01)^{-35}(1{,}01)^{-1/3} \\ &= 3000(0{,}705914)(0{,}996689) = \$2110{,}73 \end{aligned}$$

Regla práctica. En este caso $n = 106/3 = 35\frac{1}{3}$; descontamos S por 36 períodos (el número mayor entero de períodos de conversión más próximo al plazo dado) y le sumamos interés simple por $36 - 35\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ de período de conversión, es decir por dos meses; por tanto,

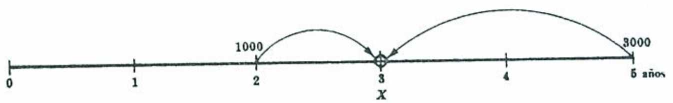
$$\begin{aligned} C &= 3000(1{,}01)^{-36}(1 + 0{,}04/6) = 3000(0{,}698925)(3{,}02/3) \\ &= \$2110{,}75 \end{aligned}$$

Véase el problema 5.

ECUACIONES DE VALOR. Una *ecuación de valor* se obtiene igualando en una fecha de comparación o fecha focal, la suma de un conjunto de obligaciones con otro conjunto de obligaciones. En el capítulo 4 se hizo notar que cuando se trata con interés simple, dos conjuntos de obligaciones que son equivalentes en una cierta fecha pueden no serlo en otra distinta. Cuando se trata con interés compuesto, dos conjuntos de obligaciones que son equivalentes en una fecha también lo son en cualquier otra.

Ejemplo 5.

M debe a N $1000 pagaderos en 2 años y $3000 pagaderos en 5 años. Acuerdan que M liquide sus deudas mediante un pago único al final de 3 años sobre la base de un rendimiento de 6% convertible semestralmente.



Designemos con X el pago requerido. Tomando el final del tercer año como fecha focal, la deuda de $1000 está vencida en un año y su valor es $1000(1{,}03)^2$; la deuda de $3000 vence en dos años y su valor es $3000(1{,}03)^{-4}$, mientras que el valor del pago X es X en la fecha focal. Igualando la suma de los valores de las deudas con el valor del pago único, en la fecha focal, tenemos

(*a*) $$X = 1000(1{,}03)^2 + 3000(1{,}03)^{-4}$$

Tomando la fecha inicial como fecha focal, la ecuación de valor es

(*b*) $$X(1{,}03)^{-6} = 1000(1{,}03)^{-4} + 3000(1{,}03)^{-10}$$

Tomando el final del quinto año como fecha focal, la ecuación de valor es

(*c*) $$X(1{,}03)^4 = 1000(1{,}03)^6 + 3000$$

Nótese que las tres ecuaciones de valor son equivalentes, por ejemplo, (*b*) puede ser obtenida de (*a*) multiplicando

esta última por $(1{,}03)^{-6}$; y (*c*) puede ser obtenida de (*b*) multiplicando ésta por $(1{,}03)^{10}$. Sin embargo, si tomamos 100 años después como fecha focal, la ecuación de valor correspondiente puede ser obtenida de (*b*) multiplicando ésta por $(1{,}03)^{200}$ De todas las ecuaciones que puedan formarse, (*a*) es visiblemente la más simple para determinar X. Utilizándola tenemos

$$\begin{aligned} X &= 1000(1{,}03)^2 + 3000(1{,}03)^{-4} \\ &= 1000(1{,}060900) + 3000(0{,}888487) = \$3726{,}36 \end{aligned}$$

Ejemplo 6.

M debe $1000 pagaderos en 1 año y $3000 pagaderos en 4 años. Acuerda pagar $2000 de inmediato y el resto en 2 años. ¿Cuánto tendrá que pagar al final del 2o. año suponiendo un rendimiento de 5% convertible semestralmente?

Designemos con X el pago requerido. Tomando como fecha focal el final del 2o. año, la deuda de $1000 está vencida 1 año y su valor es $1000(1{,}025)^2$, mientras que la deuda de $3000 vence en 2 años y su valor es $3000(1{,}025)^{-4}$ Análogamente, el pago de $2000 está vencido dos años en la fecha focal y su valor es $2000(1{,}025)^4$, mientras que el pago X vale X. Igualando la suma del valor de los dos pagos y de las dos deudas, tenemos

$$2000(1{,}025)^4 + X = 1000(1{,}025)^2 + 3000(1{,}025)^{-4}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} X &= 1000(1{,}025)^2 + 3000(1{,}025)^{-4} - 2000(1{,}025)^4 \\ &= 1050{,}62 + 2717{,}85 - 2207{,}63 = \$1560{,}84 \end{aligned}$$

Véanse los problemas 6-8.

TIEMPO EQUIVALENTE. La fecha en la cual un conjunto de obligaciones, con vencimiento en fechas diferentes, puede ser liquidado mediante un pago único igual a la suma de las distintas deudas, se conoce como *fecha de vencimiento promedio* de las deudas. El tiempo por trascurrir hasta dicha fecha se conoce como *tiempo equivalente*.

Ejemplo 7.

¿Cuál es el tiempo equivalente para el pago de unas deudas de $1000 con vencimiento en 1 año, y $3000 con vencimiento en 2 años suponiendo un rendimiento de 4% convertible trimestralmente?

Designemos con x (años) el tiempo equivalente. Tomando el día de hoy como fecha focal, la ecuación de valor es

$$4000(1{,}01)^{-4x} = 1000(1{,}01)^{-4} + 3000(1{,}01)^{-8}$$

Entonces, $$(1{,}01)^{-4x} = \frac{1000(1{,}01)^{-4} + 3000(1{,}01)^{-8}}{4000} = \frac{3731{,}43}{4000} = 0{,}9328575$$

Interpolando en la tabla V,

$$1 \left[\begin{array}{c} 6 \\ 4x \\ 7 \end{array}\right] 4x - 6 \qquad -0{,}00933 \left[\begin{array}{c} 0{,}94205 \\ 0{,}93286 \\ 0{,}93272 \end{array}\right] -0{,}00919$$

$$\frac{4x-6}{1} = \frac{0{,}00919}{0{,}00933} = 0{,}985 \qquad \text{y} \qquad x = 1{,}746 \quad \text{o sea, 1,75 años}$$

El lector demostrará que $x = 1{,}746$ años, si se usan logaritmos.

Frecuentemente se usa la siguiente regla práctica para hallar el tiempo equivalente:

(i) Multiplíquese cada deuda por el tiempo (años) que falte hasta su vencimiento.

(ii) Súmense los productos obtenidos y divídanse entre la suma de las deudas.

Ejemplo 8.

Aplicando la regla práctica al ejemplo 6, tenemos

$$x = \frac{1000(1)+3000(2)}{4000} = \frac{7000}{4000} = 1{,}75 \text{ años}$$

Véase el problema 9.

Problemas resueltos

1. Debo $1250 pagaderos dentro de 3 años, sin intereses. ¿Qué cantidad debería estar dispuesto a aceptar mi acreedor en este momento si puede él invertir el dinero al 4%, convertible semestralmente?

$S = 1250$, $i = 0{,}02$, $n = 6$; por tanto,

$$C = S(1+i)^{-n} = 1250(1{,}02)^{-6} = 1250(0{,}887971) = \$1109{,}96$$

2. ¿Cuánto debe invertir X ahora al 4,6% convertible trimestralmente para tener $15.000 en su cuenta dentro de 10 años?

$S = 15.000$, $i = 0{,}0115$, $n = 40$; por lo cual $C = 15{,}000(1{,}0115)^{-40}$.

$$\begin{aligned} \log C &= \log 15.000 - 40 \log 1{,}0115 \\ &= 4{,}176091 - 0{,}198636 = 3{,}977455 \qquad \text{y} \qquad C = \$9494{,}10 \end{aligned}$$

3. En la compra de una casa, Y paga $10.000 de cuota inicial y acuerda pagar $7500 dos años después. Hallar el valor de contado de la casa al 6% convertible semestralmente.

El valor de contado C, es $10.000 más el valor presente de $7500 pagaderos en 2 años al 6% convertible semestralmente. Por tanto,

$$C = 10{,}000 + 7500(1{,}03)^{-4} = 10.000 + 7500(0{,}888487) = \$16.663{,}65$$

4. Un documento fechado el 1o. de febrero de 1960, estipula el pago de $2500 con intereses al 5% convertible semestralmente 4 años más tarde. Hallar el importe de la venta del documento el 1o. de febrero de 1963 suponiendo un rendimiento al 6% convertible trimestralmente.

El valor al vencimiento del documento es

$$2500(1{,}025)^8 = 2500(1{,}218403) = \$3046{,}01$$

El valor del documento el 1o. de febrero de 1963 al 6% convertible trimestralmente, es el valor presente de $3046,01 con vencimiento en 1 año, esto es,

$$3046{,}01(1{,}015)^{-4} = 3046{,}01(0{,}942184) = \$2869{,}90$$

5. Hallar el valor presente de $5000 pagaderos en 6 años 8 meses suponiendo un rendimiento de 6% convertible trimestralmente.

$S = 5000$, $i = 0{,}015$, $n = 80/3$; por tanto $C = 5000(1{,}015)^{-80/3}$.

Regla teórica. Usando las tablas V y VI,

$$\begin{aligned} C &= 5000(1{,}015)^{-80/3} = 5000(1{,}015)^{-27}(1{,}015)^{1/3} \\ &= 5000(0{,}668986)(1{,}004975) = \$3361{,}57 \end{aligned}$$

Nótese que si las tablas V y VII fueran usadas, como en el ejemplo 4, tendríamos

$$C = 5000(1{,}015)^{-26}(1{,}015)^{-1/3}(1{,}015)^{-1/3}$$

Regla práctica. Siguiendo el ejemplo 4,

$$C = 5000(1{,}015)^{-27}(1+0{,}06/12) = 5000(0{,}668986)(1{,}005) = \$3361{,}65$$

6. B debe $3000 con vencimiento en 2 años sin intereses; y $2000 con intereses al 4% convertible trimestralmente, pagaderos en 6 años. Suponiendo un rendimiento de 5% convertible semestralmente, ¿cuál sería el pago único que tiene que hacer dentro de 4 años para liquidar sus deudas?

Designemos con X el pago requerido. Las deudas de B son $3000 pagaderos en 2 años, y $2000(1{,}01)^{24}$ pagaderos en 6 años. Tomando el final del cuarto año como fecha focal, la ecuación de valor es

$$\begin{aligned} X &= 3000(1{,}0125)^4 + 2000(1{,}01)^{24}(1{,}025)^{-4} \\ &= 3000(1{,}103813) + 2000(1{,}269735)(0{,}905951) \\ &= \$5612{,}08 \end{aligned}$$

El lector demostrará que con cualquier otra fecha focal se requiere una división.

7. M obtiene un préstamo de $5000 con intereses al 5% convertible semestralmente. Acepta pagar $1000 dentro de 1 año, $2000 en 2 años y el saldo en 3 años. Hallar el pago final X.

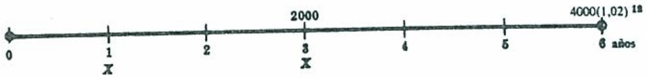
Tomando el final del tercer año como fecha focal, tenemos

$$1000(1{,}025)^4 + 2000(1{,}025)^2 + X = 5000(1{,}025)^6$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} X &= 5000(1{,}025)^6 - 2000(1{,}025)^2 - 1000(1{,}025)^4 \\ &= 5000(1{,}159693) - 2000(1{,}050625) - 1000(1{,}103813) \\ &= \$2593{,}40 \end{aligned}$$

8. Suponiendo una tasa efectiva de 4%, ¿con qué pagos iguales X al final de 1 año y al final de 3 años, es posible remplazar las siguientes obligaciones: $2000 con vencimiento en 3 años sin intereses?, y $4000 con intereses al 4% convertible semestralmente con vencimiento en 6 años?



Usando el final del 6o. año como fecha focal, la ecuación de valor es

$$X(1{,}04)^5 + X(1{,}04)^3 = 2000(1{,}04)^3 + 4000(1{,}02)^{12}$$

Por tanto,
$$X(1{,}216653) + X(1{,}124864) = 2000(1{,}124864) + 4000(1{,}268242)$$
$$2{,}341517X = 7322{,}70 \quad \text{y} \quad X = \$3127{,}33$$

El lector demostrará que no puede evitarse la división y que cualquier otra fecha focal implicará un triple producto adicional.

9. Deducir la regla práctica para hallar el tiempo equivalente.

Sean las deudas $\$A$ con vencimiento en a años, $\$B$ con vencimiento en b años y $\$C$ con vencimiento en c años. Sea $i = j/m$ la tasa de interés por período y sea n (en años) el tiempo equivalente.

Tomando hoy como fecha focal, la ecuación de valor es

(i) $$(A+B+C)(1+i)^{-mn} = A(1+i)^{-ma} + B(1+i)^{-mb} + C(1+i)^{-mc}$$

Sustituyendo $(1+i)^{-p}$ en (i), por los dos primeros términos de la expansión binomial correspondiente: $1 - pi$, tenemos

$$(A+B+C)(1-mni) = A(1-mai) + B(1-mbi) + C(1-mci)$$

Por tanto,
$$(A+B+C)mni = (Aa+Bb+Cc)mi$$

y
$$n = \frac{(Aa+Bb+Cc)mi}{(A+B+C)mi} = \frac{Aa+Bb+Cc}{A+B+C}$$

$$= \frac{\text{suma de los productos de las deudas y el tiempo (años) a trascurrir hasta el vencimiento}}{\text{suma de las deudas}}$$

Problemas propuestos

10. Hallar el valor presente de:
(*a*) $1500 pagaderos en 10 años al 5%.
(*b*) $2000 pagaderos en $8\frac{1}{2}$ años al 5% convertible semestralmente.
(*c*) $5000 pagaderos en 6 años al 4,8% convertible trimestralmente.
(*d*) $4000 pagaderos en 5 años 5 meses al 6% convertible semestralmente.
(*e*) $4000 pagaderos en 5 años 4 meses al 6% convertible trimestralmente.
Resp. (*a*) $920,87, (*b*) $1314,39, (*c*) $3755,20, (*d*) $2903,96, $2904,13, (*e*) $2911,50, $2911,58

11. Al nacer su hijo, un padre desea invertir una cantidad tal, que acumulada al $3\frac{1}{2}$% convertible semestralmente importe $6000 cuando el hijo tenga 21 años. ¿Cuánto tendrá que invertir? *Resp.* $2895,38

12. Un deudor puede liquidar una deuda pagando (*a*) $8000 en la fecha o (*b*) $10.000 dentro de cinco años. ¿Qué opción debe aceptar suponiendo un rendimiento del 5% convertible semestralmente? *Resp.* (*b*)

13. ¿Cuál es el valor presente de un documento por $1200 con intereses al 5% convertible semestralmente por 10 años si el rendimiento actual es del $4\frac{1}{2}$% efectivo? *Resp.* $1266,18

14. M firma un documento comprometiéndose a pagar a N $3000 en 6 años con intereses al 5% convertible trimestralmente. Cuatro años después, N vende el documento a P. ¿Cuánto pagó P por el documento si la tasa de interés era del 4% convertible semestralmente? *Resp.* $3734,23

15. Una deuda de $500 pagaderos en 2 años y otra de $750 pagaderos en 6 años se van a liquidar mediante un pago único dentro de 4 años. Hallar el importe del pago suponiendo un rendimiento del 4% convertible trimestralmente. *Resp.* $1234,04

16. Una deuda de $250 vencida hace dos años y otra de $750 pagaderos en 3 años se van a liquidar en la fecha mediante un pago único. Hallar el importe del pago suponiendo un rendimiento al 5% convertible semestralmente. *Resp.* $922,67

17. M debe $1000 pagaderos dentro de 3 años. Si hace, el día de hoy, un pago de $400, ¿cuál será el importe del pago que tendrá que hacer en 2 años para liquidar su deuda suponiendo un rendimiento de 5% convertible semestralmente? *Resp.* $510,29

18. El día de hoy, un comerciante compra artículos por valor de $1500. Paga $500 iniciales y $500 al término de 4 meses. Suponiendo un rendimiento de 6% convertible mensualmente, ¿cuál será el importe del pago final que tendrá que hacer al término de 6 meses? *Resp.* $525,37

19. M firmó un documento por $1500 con intereses acumulados por 2 años al 5% convertible trimestralmente, vencido el día de hoy. Paga $500 únicamente y acuerda pagar el resto en 1 año. Hallar el importe del pago requerido. *Resp.* $1215,66

20. Supóngase, en el problema 19, que M acuerda pagar el resto en dos pagos con vencimiento en 6 meses y 1 año a partir de hoy. Hallar el importe de los pagos requeridos. *Resp.* $600,28

21. Sustituir dos deudas de $400 y $800 con vencimiento en 3 y 5 años respectivamente, por dos pagos iguales con vencimiento en 2 y 4 años, suponiendo un rendimiento de 5% convertible semestralmente. *Resp.* $561,69

22. Un terreno es vendido por $500 en efectivo y $250 anuales por los próximos 4 años. Suponiendo un rendimiento de 6% efectivo, hallar el precio de contado del terreno. *Resp.* $1366,28

23. ¿Cuál será el importe de cada uno de los 4 pagos anuales que tendrán que hacerse para liquidar una deuda de $2000, con vencimiento el día de hoy, suponiendo un rendimiento de 4% convertible trimestralmente, si, (*a*) el primer pago se hace de inmediato, (*b*) el primer pago se hace al término de 1 año. *Resp.* (*a*) $530,24 (*b*) $551,76

24. El día de hoy, B contrae el compromiso de pagar $5000 en 10 años, con intereses al 4,2%. ¿Cuál es el valor de la obligación dentro de 6 años suponiendo para entonces un rendimiento de 3,8%? *Resp.* $6499,10

25. ¿A qué tasa efectiva, un pago único de $1500 hoy, es equivalente a dos pagos de $800 cada uno con vencimiento en 1 y 2 años respectivamente? *Resp.* 4,41%

26. ¿En qué tiempo un pago único de $1200 saldará las dos deudas del problema 21? *Resp.* En 4,31 años a partir de hoy

27. Hallar el tiempo equivalente para el pago de dos deudas de $250 cada una, con vencimiento en 6 meses y 1 año respectivamente, suponiendo un rendimiento de 6% convertible mensualmente. *Resp.* 0,75 años

Capítulo 9

Anualidades ciertas ordinarias

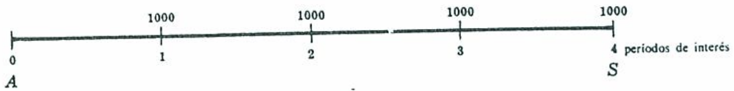
UNA ANUALIDAD es una serie de pagos iguales efectuados a intervalos iguales de tiempo. Ejemplos de anualidades son abonos semanales, pagos de renta mensuales, dividendos trimestrales sobre acciones, pagos semestrales de interés sobre bonos, primas anuales en pólizas de seguros de vida, etc.

El tiempo trascurrido entre cada pago sucesivo de la anualidad se conoce como *intervalo de pago*. El tiempo contado desde el principio del primer intervalo de pago hasta el final del último intervalo de pago se conoce como *plazo* de la anualidad. La suma de todos los pagos hechos en un año se conoce como *renta anual;* en consecuencia, una renta anual de \$2000 pagaderos trimestralmente significa el pago de \$500 cada 3 meses.

Una *anualidad cierta* es una anualidad en la cual los pagos principian y terminan en fechas fijas. Una *anualidad contingente* es aquella en la cual el plazo depende de algún suceso cuya realización no puede fijarse. Una serie predeterminada de pagos periódicos forman una anualidad cierta; ya que los pagos periódicos de primas en el seguro de vida terminan al ocurrir la muerte del asegurado, éstos forman una anualidad contingente. Las anualidades contingentes serán tratadas en capítulos posteriores. Por el momento, la palabra anualidad se referirá invariablemente a una anualidad cierta.

Una *anualidad cierta ordinaria* es aquella en la cual los pagos son efectuados al final de cada intervalo de pago, es decir, que el primer pago se hace al final del primer intervalo de pago, el segundo al final del segundo intervalo de pago y, así sucesivamente. En este capítulo todas las anualidades serán anualidades ciertas ordinarias. Sin embargo, consideraremos únicamente el *caso simple*, esto es, anualidades en las cuales el intervalo de pago y el período de interés coinciden.

MONTO Y VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD. Consideremos una anualidad ordinaria de \$1000 anuales, durante 4 años, al 5%.



El *monto* S de la anualidad es la suma de los montos compuestos de los distintos pagos, cada uno acumulado hasta el término del plazo. Puesto que el primer pago gana intereses 3 años, el segundo pago 2 años, el tercero 1 año y el cuarto coincide con el término del plazo, tenemos que:

$$S = 1000(1{,}05)^3 + 1000(1{,}05)^2 + 1000(1{,}05) + 1000$$

o, invirtiendo el orden,

$$S = 1000 + 1000(1{,}05) + 1000(1{,}05)^2 + 1000(1{,}05)^3$$

Por lo cual,

(i)
$$\begin{aligned} S &= 1000[1 + (1{,}05) + (1{,}05)^2 + (1{,}05)^3] \\ &= 1000[1 + 1{,}05 + 1{,}1025 + 1{,}157625] \\ &= 1000(4{,}310125) = \$4310{,}12 \end{aligned}$$

Puesto que en (i) la suma dentro de los paréntesis rectangulares corresponde a la suma de una progresión geométrica (capítulo 3) con término inicial 1 y con razón $1{,}05 > 1$, podemos escribir

$$\begin{aligned} S &= 1000\,\frac{(1{,}05)^4 - 1}{(1{,}05) - 1} = 1000\,\frac{1{,}21550625 - 1}{0{,}05} = 1000\,\frac{0{,}21550625}{0{,}05} \\ &= 1000(4{,}310125) = \$4310{,}12 \end{aligned}$$

El *valor presente* A de una anualidad es la suma de los valores presentes de los distintos pagos, cada uno descontado al principio del plazo, por tanto,

$$\begin{aligned} A &= 1000(1{,}05)^{-1} + 1000(1{,}05)^{-2} + 1000(1{,}05)^{-3} + 1000(1{,}05)^{-4} \\ &= 1000[(1{,}05)^{-1} + (1{,}05)^{-2} + (1{,}05)^{-3} + (1{,}05)^{-4}] \\ &= 1000\,\frac{(1{,}05)^{-1} - (1{,}05)^{-5}}{1 - (1{,}05)^{-1}} = 1000\,\frac{1 - (1{,}05)^{-4}}{(1{,}05) - 1} = 1000\,\frac{1 - 0{,}82270247}{0{,}05} \\ &= \$3545{,}95 \end{aligned}$$

Es conveniente que el lector represente cada anualidad en una línea de tiempo tomando como unidad de medida el *período de interés* (p.i.). No es necesario marcar todos los períodos de interés; sin embargo, el principio del plazo (representado por 0 en la escala), el término del plazo (n, en la escala) y algunos de los períodos de interés, deben mostrarse. (El hecho que el intervalo de pago coincida con el período de interés, es únicamente requisito de este capítulo.) La representación básica de una anualidad aparece en el problema 1; en los problemas 4-6 aparecen variaciones.

FORMULAS DE ANUALIDADES. Sean

R = el pago periódico de una anualidad,
i = j/m = la tasa de interés por período de interés,
n = el número de intervalos de pago = el número de períodos de interés,
S = el monto de la anualidad,
A = el valor presente de la anualidad.

En el problema 1, deduciremos las fórmulas básicas de anualidades

$$S = R \cdot s_{\overline{n}|i} = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{1}$$

y

$$A = R \cdot a_{\overline{n}|i} = R\,\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \tag{2}$$

Donde $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ es el monto de una anualidad de 1 por intervalo de pago durante n intervalos y $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ es el valor presente de una anualidad de 1 por intervalo de pago durante n intervalos. El símbolo $s_{\overline{n}|i}$ se lee como "S sub n al i". Para determinadas i y n, encontramos su valor en la tabla XII. El símbolo $a_{\overline{n}|i}$ se lee "a sub n al i". Para determinadas i y n encontramos su valor en la tabla XIII.

Ejemplo 1.

Hallar el monto y valor presente de una anualidad de \$150 mensuales durante 3 años 6 meses al 6% convertible mensualmente.

$R = 150$, $i = 0{,}005$, $n = 42$; de (*1*) y (*2*) tenemos

$$S \;=\; R \cdot s_{\overline{n|}i} \;=\; 150\, s_{\overline{42|}.005} \;=\; 150(46{,}60654) \;=\; \$6990{,}98 \qquad \text{(tabla XII)}$$

y

$$A \;=\; R \cdot a_{\overline{n|}i} \;=\; 150\, a_{\overline{42|}.005} \;=\; 150(37{,}79830) \;=\; \$5669{,}74 \qquad \text{(tabla XIII)}$$

Cuando la tasa o el tiempo dados no corresponden a los de las tablas XII y XIII, los cálculos pueden hacerse utilizando logaritmos.

Ejemplo 2.
Hallar el monto y valor presente de una anualidad de $2275 cada 6 meses durante 8 años y 6 meses al 5,4% convertible semestralmente.

$R = 2275$, $i = 0{,}027$, $n = 17$; con lo cual

$$S \;=\; 2275\, s_{\overline{17|}.027} \;=\; 2275\,\frac{(1{,}027)^{17} - 1}{0{,}027}$$

Calculamos primero $N = (1{,}027)^{17}$ con logaritmos:

$$\log N \;=\; 17 \log (1{,}027) \;=\; 17(0{,}0115704) \;=\; 0{,}196697 \qquad \text{y} \qquad N = 1{,}5729$$

Por tanto

$$S \;=\; 2275\,\frac{0{,}5729}{0{,}027}$$

$$\begin{aligned} \log 2275 &= 3{,}356981 \\ \log 0{,}5729 &= 9{,}758079 - 10 \\ \operatorname{colog} 0{,}027 &= 1{,}568636 \\ \hline \log S &= 4{,}683696 \\ S &= \$48.272 \end{aligned}$$

y es el monto requerido.

$$A \;=\; 2275\, a_{\overline{17|}.027} \;=\; 2275\,\frac{1 - (1{,}027)^{-17}}{0{,}027}$$

Primero calculamos $N = (1{,}027)^{-17}$ con logaritmos:

$$\log N \;=\; -17 \log 1{,}027 \;=\; 0 - 0{,}196697 \;=\; 9{,}803303 - 10 \qquad \text{y} \qquad N = 0{,}63578$$

Por tanto,

$$A \;=\; 2275\,\frac{0{,}36422}{0{,}027}$$

$$\begin{aligned} \log 2275 &= 3{,}356981 \\ \log 0{,}36422 &= 9{,}561364 - 10 \\ \operatorname{colog} 0{,}027 &= 1{,}568636 \\ \hline \log A &= 4{,}486981 \\ A &= \$30.689 \end{aligned}$$

y es el valor presente requerido.

Véanse los problemas 2-3.

Las dificultades con las anualidades provienen principalmente de no tener en cuenta los siguientes hechos al aplicar las fórmulas:

(i) La fórmula (*1*) nos da el monto de la anualidad justamente después que el último pago ha sido efectuado.

(ii) La fórmula (*2*) nos da el valor de la anualidad un período antes de hacer el primer pago.

Véanse los problemas 4-7.

Problemas resueltos

1. Deducir: (*a*) $s_{\overline{n|}i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$, (*b*) $a_{\overline{n|}i} = \dfrac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$.

Considérese una anualidad de 1 por período de interés por n años a la tasa i por períodos de interés.

(*a*) El último pago no gana interés, el anterior gana interés durante un período de interés y su monto es $1(1+i) = 1+i$, el antepenúltimo pago gana interés durante dos períodos de interés y su monto es $(1+i)^2, \ldots$, el primer pago gana intereses durante $(n-1)$ períodos de interés y su monto es $(1+i)^{n-1}$. Tenemos que

$$s_{\overline{n|}i} \;=\; 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1}$$

es la suma de una progresión geométrica de n términos cuyo primer término es $a = 1$ y cuya razón es $(1+i) > 1$. Por tanto,

$$s_{\overline{n|}i} \;=\; \frac{ar^n - a}{r - 1} \;=\; \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \;=\; \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

(*b*) Vemos claramente en la línea de tiempo anterior que el valor presente de la anualidad es el valor presente de $s_{\overline{n|}i}$ con vencimiento en n períodos de interés. Por tanto, tenemos que

$$a_{\overline{n|}i} \;=\; (1+i)^{-n} s_{\overline{n|}i} \;=\; (1+i)^{-n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \;=\; \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Se recomienda al lector que deduzca esta fórmula como la suma de una progresión geométrica.

2. En los últimos diez años, X ha depositado $500 al final de cada año en una cuenta de ahorro, la cual paga el $3\frac{1}{2}$% efectivo. ¿Cuánto había en la cuenta inmediatamente después de haber hecho el décimo depósito?

$R = 500$, $i = 0{,}035$, $n = 10$; aplicando (*1*),

$$S \;=\; R\, s_{\overline{n|}i} \;=\; 500\, s_{\overline{10|}.035} \;=\; 500(11{,}73139) \;=\; \$5865{,}70$$

3. El día de hoy, M compra una anualidad de $2500 anuales durante 15 años, en una compañía de seguros que utiliza el 3% anual. Si el primer pago vence en un año, ¿cuál fue el costo de la anualidad?

$R = 2500$, $i = 0.03$, $n = 15$; por tanto, aplicando (*2*) tenemos que

$$A \;=\; 2500\, a_{\overline{15|}.03} \;=\; 2500(11{,}937935) \;=\; \$29.844{,}84$$

4. La compañía de televisión XYZ tiene en oferta una máquina, con $200 de cuota inicial y $25 mensuales por los próximos 12 meses. Si se carga un interés de 9% convertible mensualmente, hallar el valor de contado equivalente C.

La cuota inicial no es parte de la anualidad. El valor de contado de la máquina es $200 más el valor presente de una anualidad de 12 pagos mensuales de $25 cada uno. Por tanto, el valor de contado será

$$C \;=\; 200 + 25\, a_{\overline{12|}.0075} \;=\; 200 + 25(11{,}4349) \;=\; \$485{,}87$$

5. M depositó cada 6 meses $100 en una cuenta de ahorros, la cual le producía intereses al 3% convertible semestralmente. El primer depósito se hizo cuando el hijo de M tenía 6 meses de edad y el último cuando cumplió 21 años. El dinero permaneció en la cuenta y fue entregado al hijo cuando cumplió 25 años. ¿Cuánto recibió?

Designemos con X la cantidad recibida.

Primera solución.

El monto de la anualidad (justamente después del último depósito) es $S = 100 \cdot s_{\overline{42}|.015}$ y X es el monto acumulado de S después de 8 períodos de interés, esto es,

$$X = S(1{,}015)^8 = 100\, s_{\overline{42}|.015}\,(1{,}015)^8 = 100(57{,}92314)(1{,}126493) = \$6525{,}00$$

Segunda solución.

Una forma simple de cálculo se obtiene con el siguiente razonamiento: Imaginemos que se hicieron 8 pagos adicionales (50 en total). En este caso X es el monto de 50 pagos menos el monto de los 8 pagos que en realidad no se hicieron, por tanto

$$X = 100\, s_{\overline{50}|.015} - 100\, s_{\overline{8}|.015} = 100(73{,}68283) - 100(8{,}43284) = \$6525{,}00$$

6. M compró una casa por $5000 de cuota inicial, comprometiéndose a pagar $200 cada 3 meses durante los próximos 10 años. Se pactó un interés de 6% convertible trimestralmente.

(*a*) ¿Cuál era el valor de contado de la casa?

(*b*) Si M omitiera los primeros 12 pagos, ¿cuánto debe pagar en el vencimiento del 13o. pago para ponerse al corriente?

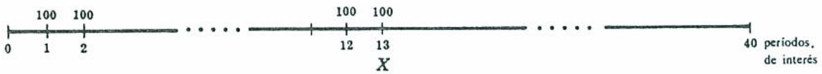
(*c*) Después de haber hecho 8 pagos, M desea liquidar el saldo existente mediante un pago único en el vencimiento del 9o. pago. ¿Cuánto debe pagar además del pago regular vencido?

(*d*) Si M omite los primeros 10 pagos, ¿cuánto debe pagar cuando venza el 11o. pago para liquidar el total de su deuda?

(*a*) Designemos con C el valor de contado de la casa. Procediendo como en el problema 4,

$$C = 5000 + 200\, a_{\overline{40}|.015} = 5000 + 200(29{,}91585) = \$10.983{,}17$$

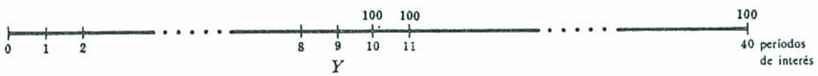
(*b*) Designemos con X el pago requerido. M debe el monto acumulado de los primeros 13 pagos



en la fecha del 13o. pago. Como en dicha fecha vence un pago, tenemos que

$$X = 200\, s_{\overline{13}|.015} = 200(14{,}23683) = \$2847{,}37$$

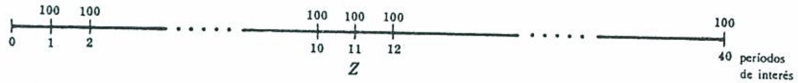
(*c*) Designemos con Y el pago requerido. Después que el 9o. pago regular ha sido hecho, $40 - 9 = 31$



quedan por hacerse. Como el primero de dichos pagos vencerá en un período de interés,

$$Y = 200\, a_{\overline{31}|.015} = 200(24{,}64615) = \$4929{,}23$$

(*d*) Designemos con Z el pago requerido. En la fecha indicada por Z en la línea de tiempo, M pagará 10 pagos vencidos,



un pago inmediato y $40 - 11 = 29$ pagos futuros. Para cumplir con las exigencias de las fórmulas (*1*) y (*2*), separamos los pagos en dos grupos:

(i) los primeros 11 pagos (con un pago en la fecha del cálculo) importan $200\, s_{\overline{11}|.015}$,

(ii) los 29 pagos restantes (el primero con vencimiento de un período de interés después de la fecha del cálculo) tienen un valor presente de $200\, a_{\overline{29}|.015}$. Por tanto,

$$Z = 200\, s_{\overline{11}|.015} + 200\, a_{\overline{29}|.015} = 200(11{,}86326) + 200(23{,}37608) = \$7047{,}87$$

7. Para liquidar una cierta deuda con intereses al 6% convertible mensualmente, M acuerda hacer pagos de $50 al final de cada mes por los próximos 17 meses y un pago final de $95,25 un mes después. ¿Cuál es el importe de la deuda?

La deuda X puede ser determinada, ya sea como

(i) el valor presente de una anualidad de $50 mensuales por 17 meses, más el valor presente de $95,25, son pagaderos en 18 meses, esto es,

$$50\, a_{\overline{17}|.005} + 95{,}25(1{,}005)^{-18}$$

o como

(ii) el valor presente de una anualidad de $50 mensuales por 18 meses más el valor presente de $45,25 pagaderos en 18 meses, esto es,

$$50\, a_{\overline{18}|.005} + 45{,}25(1{,}005)^{-18}$$

El lector demostrará que la deuda era de $900.

8. Demostrar que: $(1+i)\, s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n+1}|i} - 1$.

$$(1+i)\, s_{\overline{n}|i} = (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+i)^{n+1} - 1 - i}{i}$$

$$= \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - \frac{i}{i} = s_{\overline{n+1}|i} - 1$$

9. Deducir: (*a*) $s_{\overline{h+k}|i} = s_{\overline{h}|i} + (1+i)^h s_{\overline{k}|i}$ (*b*) $a_{\overline{h+k}|i} = a_{\overline{h}|i} + (1+i)^{-h} a_{\overline{k}|i}$.

(*a*)
$$s_{\overline{h+k}|i} = \frac{(1+i)^{h+k} - 1}{i}$$

$$= \frac{(1+i)^{h+k} - (1+i)^h + (1+i)^h - 1}{i} = \frac{(1+i)^{h+k} - (1+i)^h}{i} + \frac{(1+i)^h - 1}{i}$$

$$= (1+i)^h \frac{(1+i)^k - 1}{i} + \frac{(1+i)^h - 1}{i} = (1+i)^h s_{\overline{k}|i} + s_{\overline{h}|i}$$

(*b*)
$$a_{\overline{h+k}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-(h+k)}}{i} = \frac{1 - (1+i)^{-h} + (1+i)^{-h} - (1+i)^{-(h+k)}}{i}$$

$$= \frac{1 - (1+i)^{-h}}{i} + (1+i)^{-h}\frac{1 - (1+i)^{-k}}{i} = a_{\overline{h}|i} + (1+i)^{-h} a_{\overline{k}|i}$$

10. Aplicando las fórmulas del problema 9, obtener (*a*) $s_{\overline{178}|.02}$, (*b*) $a_{\overline{184}|.03}$.

(*a*) Escribiendo $178 = 100 + 78 = h + k$ y utilizando $s_{\overline{h+k}|i} = s_{\overline{h}|i} + (1+i)^h s_{\overline{k}|i}$,

$$\begin{aligned} s_{\overline{178}|.02} &= s_{\overline{100}|.02} + (1{,}02)^{100} s_{\overline{78}|.02} \\ &= 312{,}23230591 + (7{,}24464612)(184{,}30599558) \;=\; 1647{,}46402167 \end{aligned}$$

(*b*) Escribiendo $184 = 100 + 84 = h + k$ y utilizando $a_{\overline{h+k}|i} = a_{\overline{h}|i} + (1+i)^{-h} a_{\overline{k}|i}$,

$$\begin{aligned} a_{\overline{184}|.03} &= a_{\overline{100}|.03} + (1{,}03)^{-100} a_{\overline{84}|.03} \\ &= 31{,}59890534 + (0{,}05203284)(30{,}55008556) \;=\; 33{,}18851305 \end{aligned}$$

Problemas propuestos

11. Hallar el monto y el valor presente de las siguientes anualidades ordinarias:
(*a*) \$400 anuales durante 12 años al $2\frac{1}{2}$%.
(*b*) \$150 mensuales durante 6 años 3 meses al 6% convertible mensualmente.
(*c*) \$500 trimestrales durante 8 años 9 meses al 6% convertible trimestralmente.
Resp. (*a*) \$5518,22; \$4103,10 (*b*) \$13.608,98; \$9362,05 (*c*) \$22.796,04; \$13.537,80

12. B ahorra \$600 cada medio año y los invierte al 3% convertible semestralmente. Hallar el importe de sus ahorros después de 10 años. *Resp.* \$13.874,20

13. Hallar el valor efectivo equivalente a una anualidad de \$100 al final de cada 3 meses durante 15 años, suponiendo un interés de 5% convertible trimestralmente. *Resp.* \$4203,46

14. M está pagando \$22,50 al final de cada semestre por concepto de la prima de una póliza dotal, la cual le pagará \$1000 al término de 20 años. ¿Qué cantidad tendría si en su lugar depositara cada pago en una cuenta de ahorros que le produjera el 3% convertible semestralmente? *Resp.* \$1221,03

15. ¿Qué es más conveniente, comprar un automóvil en \$2750 de contado o pagar \$500 iniciales y \$200 al final de cada mes por los próximos 12 meses, suponiendo intereses calculados al 6% convertible mensualmente?

16. ¿Qué cantidad debió ser depositada el 1o. de junio de 1950 en un fondo que produjo el 5% convertible semestralmente con el fin de poderse hacer retiros semestrales de \$600 cada uno, a partir del 1o. de diciembre de 1950 y terminando el 1o. de diciembre de 1967? *Resp.* \$13.887,10

17. Se estima que un terreno boscoso producirá \$15.000 anuales por su explotación en los próximos 10 años y entonces la tierra podrá venderse en \$10.000. Encontrar su valor actual suponiendo intereses al 5%. *Resp.* \$121.965,15

18. Suponiendo intereses al 5,2% convertible trimestralmente, ¿qué pago único inmediato es equivalente a 15 pagos trimestrales de \$100 cada uno, haciéndose el primero al final de tres meses? *Resp.* \$1354,85

19. M invierte \$250 al final de cada 6 meses en un fondo que paga el $3\frac{3}{4}$%, convertible semestralmente. ¿Cuál será el importe del fondo, (*a*) precisamente después del 12o. depósito?, (*b*) antes del 12o. depósito?, (*c*) precisamente antes del 15o. depósito?
Resp. (*a*) \$3329,33, (*b*) \$3079,33, (*c*) \$4034,00

20. Al comprar M un coche nuevo de \$3750, le reciben su coche usado en \$1250. ¿Cuánto tendrá que pagar en efectivo si el saldo restante lo liquidará mediante el pago de \$125 al final de cada mes durante 18 meses, cargándole intereses al 6% convertible mensualmente? *Resp.* \$353,40

21. Un contrato estipula pagos semestrales de \$400 por los próximos 10 años y un pago adicional de \$2500 al término de dicho período. Hallar el valor efectivo equivalente del contrato al 7% convertible semestralmente. *Resp.* \$6941,37

22. M acuerda liquidar una deuda mediante 12 pagos trimestrales de \$300 cada uno. Si omite los tres primeros pagos, ¿que pago tendrá que hacer en el vencimiento del siguiente para, (*a*) quedar al corriente en sus pagos? (*b*) saldar su deuda? Tomar intereses al 8% convertible trimestralmente. *Resp.* (*a*) \$1236,48 (*b*) \$3434,12

23. Con el objeto de reunir una cantidad que le será entregada a su hijo al cumplir 21 años, un padre deposita \$200 cada seis meses en una cuenta de ahorro que paga el 3% convertible semestralmente. Hallar el monto de la entrega si el primer depósito se hizo el día del nacimiento del hijo y el último cuando tenía $20\frac{1}{2}$ años. *Resp.* \$11.758,40

24. M ha depositado \$25 al final de cada mes durante 20 años en una cuenta que paga el 3% convertible mensualmente. ¿Cuánto tenía en la cuenta al final de dicho período? *Resp.* \$8207,52

25. ¿Cuánto debió depositarse el 1o. de junio de 1940 en un fondo que pagó el 4% convertible semestralmente, con el objeto de poder hacer retiros semestrales de \$500 cada uno, desde el 1o. de junio de 1955 hasta el 1o. de diciembre de 1970?
Resp. \$6607,65

26. El 1o. de mayo de 1950, M depositó \$100 en una cuenta de ahorros que paga el 3% convertible semestralmente, y continuó haciendo depósitos similares cada 6 meses desde entonces. Después del 1o. de mayo de 1962, el banco elevó el interés al 4%, convertible semestralmente. ¿Cuánto tuvo en la cuenta precisamente después del depósito del 1o. de noviembre de 1970?
Sugerencia. $100\, s_{\overline{25}|.015}(1{,}02)^{17} + 100\, s_{\overline{17}|.02}$

27. En los últimos 10 años, M ha depositado \$40 al final de cada mes en una cuenta de ahorros que paga el 3% convertible semestralmente. Si la política del banco es colocar cada depósito al 3% de interés simple el día primero de cada mes y capitalizarlos semestralmente, hallar el importe de la cuenta de M. *Resp.* $241{,}50\, s_{\overline{20}|.015}$

28. Desarrollar $(1+i)^n$ por el teorema del binomio y demostrar que

$$s_{\overline{n}|i} \;=\; n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\, i + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\, i^2 + \cdots$$

29. Utilizando los seis primeros términos del desarrollo del problema 28, hallar el valor de $s_{\overline{10}|.01}$ con 8 decimales. Comparar con el valor de la tabla XII.

30. Demostrar que $(1+i)\, a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n-1}|i} + 1$.

31. Demostrar que: (*a*) $s_{\overline{h-k}|i} = s_{\overline{h}|i} - (1+i)^h a_{\overline{k}|i} \qquad (h > k)$

(*b*) $a_{\overline{h-k}|i} = a_{\overline{h}|i} - (1+i)^{-h} s_{\overline{k}|i} \qquad (h > k)$

32. Demostrar que: $\dfrac{1}{s_{\overline{n+m}|i}} = \dfrac{\dfrac{1}{s_{\overline{n}|i}}}{\dfrac{1}{s_{\overline{n}|i}}\cdot s_{\overline{m}|i} + (1+i)^m}$

Capítulo 10

Anualidades ciertas ordinarias

Pago periódico, plazo, tasa de interés

PAGO PERIODICO. Resolviendo para R las fórmulas (*1*) y (*2*), del capítulo 9, tenemos que

$$R = S\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} \qquad (1)$$

y

$$R = A\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} \qquad (2)$$

es el pago periódico o la renta periódica de una anualidad cuyo monto (*1*) o valor presente (*2*) es conocido. Para determinados i y n, el valor de $\frac{1}{s_{\overline{n}|i}}$ está dado en la tabla XIV. No se incluyen tablas para valores de $\frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$ ya que (véase el problema 1),

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} + i \qquad (3)$$

Ejemplo 1.

De la tabla XIV tenemos que, $\frac{1}{s_{\overline{20}|.02}} = 0{,}04115672$. Por tanto,

$$\frac{1}{a_{\overline{20}|.02}} = \frac{1}{s_{\overline{20}|.02}} + 0{,}02 = 0{,}04115672 + 0{,}02 = 0{,}06115672$$

Ejemplo 2.

¿Cuál tiene que ser el importe de cada uno de los depósitos semestrales que deberán hacerse en una cuenta de ahorros que paga el $3\frac{1}{2}$% convertible semestralmente, durante 10 años para que el monto sea de \$25.000, precisamente después del último depósito?

$S = 25.000$, $i = 0{,}0175$, $n = 20$; de (*1*) tenemos que

$$R = S\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} = 25.000\frac{1}{s_{\overline{20}|.0175}} = 25.000(0{,}0421912) = \$1054{,}78$$

Véase el problema 2.

Ejemplo 3.

Tres meses antes de ingresar al colegio un estudiante recibe \$10.000, los cuales son invertidos al 4% convertible trimestralmente. ¿Cuál es el importe de cada uno de los retiros trimestrales que podrá hacer durante cuatro años, iniciando el primero, trascurridos tres meses?

$A = 10.000$, $i = 0{,}01$, $n = 16$; de (*2*) tenemos que

$$R = A\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = 10.000\frac{1}{a_{\overline{16}|.01}} = 10.000(0{,}0579446 + 0{,}01)$$
$$= 10.000(0{,}0679446) = \$679{,}45$$

Véanse los problemas 3-5.

PLAZO. Las fórmulas (*1*) y (*2*) del capítulo 9 pueden ser resueltas aproximadamente para n, ya sea interpolando en las tablas XII y XIII o utilizando logaritmos.

Ejemplo 4.

M obtiene un préstamo de \$3750, acordando pagar capital e intereses al 6% convertible semestralmente mediante pagos semestrales de \$225 cada uno haciendo el primero en 6 meses. ¿Cuántos pagos deberá hacer?

$A = 3750$, $R = 225$, $i = 0{,}03$; por tanto

$$3750 = 225\, a_{\overline{n}|.03} \quad \text{y} \quad a_{\overline{n}|.03} = \frac{3750}{225} = 16{,}6667$$

En la tabla XIII, encontramos para $i = 0{,}03$ que

$$a_{\overline{23}|.03} = 16{,}44361 \quad \text{y} \quad a_{\overline{24}|.03} = 16{,}93554$$

O sea que una anualidad de 23 pagos tiene un valor presente ligeramente menor de \$3750, mientras que una de 24 pagos tiene un valor presente de algo más de \$3750.

En este caso, nada se ganaría intentando obtener n con más exactitud, ya que a M se le presentaría alguna solución con las dos alternativas siguientes:

(i) aumentar el 23º. pago en una cierta cantidad (véase el problema 7, capítulo 9), o

(ii) hacer 23 pagos de \$225 cada uno, y 6 meses después un pago final menor a \$225.

En la práctica, se utiliza con más frecuencia la alternativa (ii).

Ejemplo 5.

Hallar el pago final que tendría que hacerse con la alternativa (ii), en el ejemplo 4.

Con la alternativa (ii), M saldará su deuda haciendo 23 pagos semestrales de \$225 cada uno y el 24º. de X, 6 meses más tarde. Tomando como fecha focal el principio del plazo, tenemos

$$225\, a_{\overline{23}|.03} + X(1{,}03)^{-24} = 3750$$

de donde

$$X = (3750 - 225\, a_{\overline{23}|.03})(1{,}03)^{24}$$
$$= (3750 - 3699{,}81)(2{,}0328) = \$102{,}03$$

Ejemplo 6.

Se va a constituir un fondo de \$5000 mediante depósitos de \$250 cada 3 meses. Si el fondo gana 4% convertible trimestralmente, hallar el número de depósitos de \$250 que tendrán que hacerse y el importe del depósito que será necesario hacer 3 meses más tarde.

$S = 5000$, $R = 250$, $i = 0{,}01$; por tanto,

$$250\, s_{\overline{n}|.01} = 5000 \quad \text{y} \quad s_{\overline{n}|.01} = 20$$

En la tabla XII, encontramos que para $i = 0{,}01$

$$s_{\overline{18}|.01} = 19{,}61475 \quad \text{y} \quad s_{\overline{19}|.01} = 20{,}81090$$

O sea que se harán 18 depósitos de \$250 cada uno y un depósito final de X, tres meses después.

Para hallar el depósito final, tomamos como fecha focal el final del 19º. período de interés.

Primera solución.

Designemos con S el monto de los 18 depósitos regulares justamente después de haberse hecho el último. Tenemos que,

$$X + S(1{,}01) = X + 250\, s_{\overline{18}|.01}(1{,}01) = 5000$$
$$X = 5000 - 250\, s_{\overline{18}|.01}(1{,}01)$$
$$= 5000 - 250(19{,}61475)(1{,}01) = \$47{,}28$$

Segunda solución. Del problema 8, capítulo 9, tenemos que

$$250\, s_{\overline{18}|.01}(1{,}01) = 250(s_{\overline{19}|.01} - 1)$$

Por tanto
$$X = 5000 - 250(s_{\overline{19}|.01} - 1)$$
$$= 5000 - 250(20{,}81090 - 1) = 5000 - 4952{,}72 = \$47{,}28$$

Véanse los problemas 6-7.

APROXIMACION DE LA TASA DE INTERES. En el capítulo 6 se desarrolló una serie de fórmulas para aproximar la tasa de interés de compras a plazos. Ya que la serie de abonos conocidos constituye una anualidad cuyo plazo y valor presente son conocidos, consideremos aquí nuevamente el problema.

Ejemplo 7.

Un televisor puede ser comprado con \$449,50 al contado o \$49,50 de cuota inicial y \$27,50 mensuales durante 18 meses. (*a*) ¿Qué tasa nominal de interés se está cargando? (*b*) ¿Qué tasa efectiva de interés se está cargando?

(*a*) $A = 449{,}50 - 49{,}50 = 400$, $R = 27{,}50$, $n = 18$; con lo cual

$$27{,}50\, a_{\overline{18}|i} = 400 \quad \text{y} \quad a_{\overline{18}|i} = \frac{400}{27{,}50} = 14{,}5455$$

En la tabla XIII, encontramos que para $n = 18$

$$a_{\overline{18}|.02} = 14{,}9920 \quad \text{y} \quad a_{\overline{18}|.025} = 14{,}3534$$

O sea, que i está entre 2% y $2\frac{1}{2}$% y la tasa nominal j está entre 24% y 30% convertible mensualmente.

Para un resultado más preciso, podemos interpolar en la tabla XIII; en consecuencia,

$$0{,}005\left[\begin{array}{l} 0{,}02 \\ i \\ 0{,}025 \end{array}\right]x \qquad -0{,}6386\left[\begin{array}{l} 14{,}9920 \\ 14{,}5455 \\ 14{,}3534 \end{array}\right]-0{,}4465$$

$$\frac{x}{0{,}005} = \frac{-0{,}4465}{-0{,}6386}, \qquad x = \frac{0{,}4465}{0{,}6386}(0{,}005) = 0{,}00350$$
$$i = 0{,}02 + x = 0{,}02350$$

y $j = 12 \cdot i = 28{,}20\%$ es la tasa nominal convertible mensualmente.

(*b*) Designemos con i la tasa efectiva; entonces tenemos que

$$1 + i = (1{,}0235)^{12} = 1{,}3215$$

por tanto, $i = 32{,}15\%$.

Problemas resueltos

1. Demostrar que, $\dfrac{1}{s_{\overline{n}|i}} + i = \dfrac{1}{a_{\overline{n}|i}}$.

Tenemos que,

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} + i = \frac{i}{(1+i)^n - 1} + i = \frac{i + i(1+i)^n - i}{(1+i)^n - 1}$$
$$= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

2. La compañía XYZ debe acumular \$12.000 durante los próximos 10 años, para remplazar algunas máquinas. ¿Qué cantidad debe invertir al final de cada año en un fondo que paga el 3% efectivo para lograr su propósito?

$S = 12.000$, $i = 0{,}03$, $n = 10$; de (*1*) tenemos que,

$$R = S\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} = 12.000\frac{1}{s_{\overline{10}|.03}} = 12.000(0{,}0872305) = \$1046{,}77$$

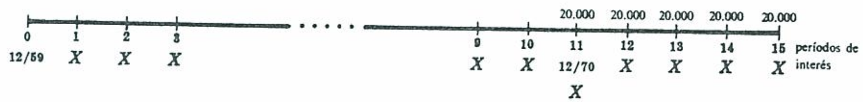
3. M compra un auto usado en \$1350. Acuerda pagar \$225 de cuota inicial y la diferencia en 15 abonos mensuales, el primero con vencimiento en un mes. Si el concesionario carga el 9% convertible mensualmente, ¿cuál es el importe del abono mensual?

$A = 1350 - 225 = 1125$, $i = 0{,}0075$, $n = 15$; de (*2*) tenemos

$$R = A\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = 1125\frac{1}{a_{\overline{15}|.0075}} = 1125(0{,}070736) = \$79{,}58$$

4. Principiando el 1o. de diciembre de 1970 y continuando por 4 años más, se necesitarán \$20.000 anuales para redimir ciertos bonos escolares. ¿Cuál será el importe de cada uno de los depósitos anuales que deberá hacerse en un fondo que paga el 2% efectivo, principiando el 1o. de diciembre de 1960 y continuando por 14 años más, para redimir los bonos en su vencimiento?

Designemos con X el depósito anual requerido. Los pagos para redimir los bonos constituyen una anualidad de 5 pagos de \$20.000 cada uno, y los depósitos constituyen una anualidad de 15 pagos de X cada uno. Igualando los montos de ambas anualidades (esto es, escribiendo una ecuación de valor con fecha focal el 1o. de diciembre de 1974), tenemos



$$X\, s_{\overline{15}|.02} = 20.000\, s_{\overline{5}|.02}$$

Por tanto,

$$X = 20.000\, s_{\overline{5}|.02}\frac{1}{s_{\overline{15}|.02}} = 20.000(5{,}2040402)(0{,}05782547) = \$6018{,}52$$

5. M ha estado acumulando un fondo al 3% efectivo, el cual le proporcionará un ingreso de \$2000 anuales durante 15 años, haciéndose el primer pago al cumplir 65 años de edad. Si desea reducir el número de pagos a 10, ¿cuánto recibirá anualmente?

Designemos con X el nuevo pago anual. El conjunto de los pagos originales

forma una anualidad cuyo valor presente es 2000 $a_{\overline{15}|.03}$, y el nuevo conjunto de pagos forma una anualidad cuyo valor presente es $X\, a_{\overline{10}|.03}$. Por tanto,

$$X\, a_{\overline{10}|.03} \;=\; 2000\, a_{\overline{15}|.03}$$

y

$$X \;=\; 2000\, a_{\overline{15}|.03}\,\frac{1}{a_{\overline{10}|.03}} \;=\; 2000(11{,}937935)(0{,}1172305) \;=\; \$2798{,}98$$

6. Tan pronto B ahorre $10.000, montará un taller de reparaciones. Si puede ahorrar $500 cada 3 meses e invertirlos al 3% convertible trimestralmente, determinar el número de depósitos de $500 que debe hacer, y el importe del depósito final.

$S = 10.000$, $R = 500$, $i = 0{,}0075$; por tanto,

$$500\, s_{\overline{n}|.0075} \;=\; 10\,000 \qquad \text{y} \qquad s_{\overline{n}|.0075} \;=\; 20$$

En la tabla XII, para $i = 0{,}0075$ encontramos

$$s_{\overline{18}|.0075} \;=\; 19{,}1947 \qquad \text{y} \qquad s_{\overline{19}|.0075} \;=\; 20{,}3367$$

B tiene que hacer 18 depósitos de $500 cada uno y un depósito final de X. Por lo cual,

$$X + 500\, s_{\overline{18}|.0075}\,(1{,}0075) \;=\; 10.000$$

o sea (véase el ejemplo 5),

$$X + 500[s_{\overline{19}|.0075} - 1] \;=\; 10.000$$

y

$$X \;=\; 10.000 - 500(20{,}33868 - 1) \;=\; \$330{,}66$$

es el depósito final.

7. El 1o. de junio de 1971 M obtuvo un préstamo de $5000 del banco XYZ, el cual carga el 5% de interés convertible trimestralmente. Acuerda pagar su deuda mediante pagos trimestrales de $400 cada uno, haciendo el primero el 1o. de septiembre de 1971. (*a*) ¿Cuándo tendrá que hacer el último pago de $400? (*b*) ¿Cuál es el importe del pago final que tendrá que hacer tres meses después? (*c*) ¿Cuánto deberá al banco precisamente después de hacer el 8o. pago?

$A = 5000$, $R = 400$, $i = 0{,}0125$; por tanto

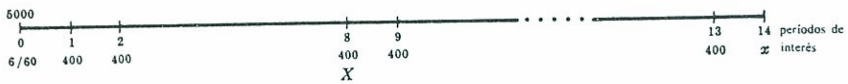
$$400\, a_{\overline{n}|.0125} \;=\; 5000 \qquad \text{y} \qquad a_{\overline{n}|.0125} \;=\; 12{,}5$$

Utilizando la tabla XIII, encontramos

$$a_{\overline{13}|.0125} \;=\; 11{,}93018 \qquad \text{y} \qquad a_{\overline{14}|.0125} \;=\; 12{,}77055$$

(*a*) M hará 13 pagos de $400, el último se hará el 1o. de septiembre de 1973.

(*b*) Para hallar el pago final x, tomamos el 1o. de diciembre de 1973 como fecha focal.



$$x \;=\; 5000(1{,}0125)^{14} - 400(s_{\overline{14}|.0125} - 1)$$
$$\;=\; 5000(1{,}189955) - 400(14{,}19638) \;=\; \$271{,}23$$

(*c*) Designemos con X la suma que M debe al banco justamente después de haber hecho el 8o. pago. Tomando el 1o. de junio de 1972 como fecha focal, tenemos que

(i)
$$X \;=\; 400\, a_{\overline{5}|.0125} + 271{,}23(1{,}0125)^{-6}$$
$$\;=\; 400(4{,}81784) + 271{,}23(0{,}92817) \;=\; \$2178{,}89$$

o, de otra forma,

(ii)
$$X \;=\; 5000(1{,}0125)^{8} - 400\, s_{\overline{8}|.0125}$$
$$\;=\; 5000(1{,}104486) - 400(8{,}35889) \;=\; \$2178{,}87$$

Problemas propuestos

8. ¿Cuánto debe invertir M al final de cada 3 meses, durante los próximos 4 años, en un fondo que paga el 4% convertible trimestralmente con el objeto de acumular $2500? *Resp.* $144,86

9. Una ciudad emite $100.000 en bonos a 20 años y constituye un fondo para redimirlos a su vencimiento. ¿Cuánto debe tomarse anualmente de los impuestos para este propósito si el fondo produce el $2\frac{1}{2}$%? *Resp.* $3914,71

10. M compra un piano que cuesta $1250. Paga $350 iniciales y acuerda hacer pagos mensuales de X pesos cada uno por los próximos 2 años venciendo el primero en un mes. Hallar X con intereses al 8% convertible mensualmente. *Resp.* $40,71

11. Remplazar una serie de pagos de $2000 al final de cada año por el equivalente en pagos mensuales al final de cada mes suponiendo un interés al 6% convertible mensualmente. *Resp.* $162,13

12. Con el objeto de tener disponibles $8000 el 1o. de junio de 1970, se tendrán que hacer depósitos iguales cada 6 meses en un fondo que paga el 5% convertible semestralmente. Determinar el importe del depósito requerido. *Resp.* $484,30

13. Sustituir una serie de pagos de $3000 al principio de cada año por el equivalente en pagos al final de cada 3 meses suponiendo intereses de 4% convertible trimestralmente. *Resp.* $768,84

14. Para liquidar una deuda de $10.000, con intereses al 4% convertible semestralmente, B acuerda hacer una serie de pagos de X cada uno, el primero con vencimiento al término de 6 meses y el último con vencimiento en cinco años y un año después un pago de $2500. Hallar X. *Resp.* $893,82

15. Al 1o. de mayo de 1970, M tiene $2475,60 en un fondo que paga el 3% convertible trimestralmente. Haciendo depósitos trimestrales iguales en el fondo, el 1o. de agosto de 1970 y el último el 1o. de noviembre de 1976, tendrá en esta última fecha $10.000 en el fondo. Hallar el depósito requerido. *Resp.* $244,61

16. M desea acumular $7500 en un fondo que paga el 5% convertible semestralmente, haciendo depósitos semestrales de $250 cada uno. (*a*) ¿Cuántos depósitos completos tendrá que hacer? (*b*) ¿Qué depósito adicional hecho en la fecha del último depósito completará los $7500? (*c*) ¿Qué depósito hecho 6 meses después del último depósito completo completará los $7500? *Resp.* (*a*) 22, (*b*) $284,28, (*c*) $103,89

17. Como beneficiaria de una póliza de $10.000 de seguro, una viuda recibirá $1000 inmediatamente y posteriormente $500 cada tres meses. Si la compañía paga intereses al 2% convertible trimestralmente, (*a*) ¿cuántos pagos completos de $500 recibirá?, (*b*) ¿con qué suma adicional, pagada con el último pago completo, cesará el beneficio?, (*c*) ¿con qué suma pagada 3 meses después del último pago completo cesará el beneficio? *Resp.* (*a*) 18, (*b*) $452,47, (*c*) $454,73

18. B adquiere un auto de $3250 con una cuota inicial de $500. Un mes después empezará una serie de pagos mensuales de $100 cada uno. Si le cargan intereses de 12% convertible mensualmente, (*a*) ¿cuántos pagos completos deberá hacer?, (*b*) ¿qué cantidad pagada, un mes después del último pago completo, saldará su deuda? *Resp.* (*a*) 32, (*b*) $32,00

19. Al cumplir 45 años, M depositó $1000 en un fondo que paga el $3\frac{1}{2}$%, y continuó haciendo depósitos similares cada año, el último al cumplir 64 años. A partir de los 65 años, M desea hacer retiros anuales de $2000. (*a*) ¿Cuántos de dichos retiros podrá hacer? (*b*) ¿Con qué retiro final, hecho un año después del último retiro completo, se agotará el fondo?
Resp. (*a*) 19, (*b*) $1711,24

20. Una persona obtiene un préstamo de $4000 y acuerda pagarlo con intereses al 4% convertible trimestralmente en pagos trimestrales de $300 cada uno, durante el tiempo necesario. Si el primer pago lo hace 3 meses después de recibido el dinero, (*a*) determinar el número necesario de pagos completos, (*b*) hallar el pago final que se hará 3 meses después del último pago completo. *Resp.* (*a*) 14, (*b*) $114,81

21. Una institución de préstamos otorga préstamos de $200 pagaderos con 12 pagos mensuales de $20,15 cada uno. Hallar la tasa convertible mensualmente que se carga. *Resp.* 36,60%

22. M coloca $300 al final de cada 3 meses durante 6 años en un fondo mutuo de inversión. Al final de 6 años él adquiere acciones avaluadas en $9874,60. ¿Qué tasa nominal convertible trimestralmente ganó su inversión? *Resp.* 10,56%

23. Una aspiradora puede ser adquirida con $125 de contado o mediante una cuota inicial de $20, seguido de 10 pagos mensuales de $11 cada uno. Hallar la tasa nominal convertible mensualmente y la tasa efectiva cargada.
Resp. 10,32%; 10,82%

24. Para comprar un televisor con costo de $650, puede obtenerse un préstamo del banco ABC y liquidarlo con 12 pagos mensuales de $60 cada uno. También puede conseguirse el dinero en el banco XYZ y pagarlo con una suma de $750 al término de 1 año. Comparar las tasas efectivas de interés cargadas y demostrar que el plan del banco XYZ es más conveniente.

25. ¿A qué tasa nominal convertible trimestralmente, el monto de 20 depósitos trimestrales de $200 cada uno, será de $5250, justamente después del último depósito? *Resp.* 11,08%

26. M compró una granja con valor de $25.000. Pagó $12.000 iniciales y acordó pagar el saldo con intereses al 3%, mediante pagos anuales de $2000, tanto tiempo como fuera necesario y un pago final menor un año más tarde. Justamente después del tercer pago anual, los documentos firmados por M se vendieron a un inversionista que esperaba ganar el $3\frac{1}{2}$%. ¿Cuál fue el precio de venta? *Resp.* $7921,51

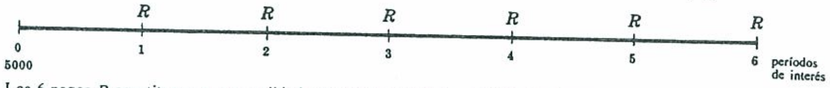
Capítulo 11

Amortización y fondos de amortización

AMORTIZACION. Se dice que un documento que causa intereses está *amortizado* cuando todas las obligaciones contraídas (tanto capital como intereses) son liquidadas mediante una serie de pagos (generalmente iguales), hechos en intervalos de tiempos iguales.

Ejemplo 1.

Una deuda de $5000 con intereses al 5% convertible semestralmente se va a amortizar mediante pagos semestrales iguales R en los próximos 3 años, el primero con vencimiento al término de 6 meses. Hallar el pago.



Los 6 pagos R constituyen una anualidad cuyo valor presente es $5000. Por tanto

$$R\, a_{\overline{6}|0{,}025} = 5000 \qquad \text{y} \qquad R = 5000\,\frac{1}{a_{\overline{6}|0{,}025}} = \$907{,}75$$

Amorticemos una deuda A amparada con un documento que causa intereses, mediante una serie de n pagos de R cada uno, tal como en el ejemplo 1. Cada pago R se aplica en primer lugar para el pago del interés vencido en la fecha del pago; la diferencia se utiliza para disminuir la deuda. En consecuencia, la cantidad disponible para disminuir la deuda aumenta con el trascurso del tiempo.

La parte de la deuda no cubierta en una fecha dada se conoce como *saldo insoluto* o *capital insoluto* en la fecha. El capital insoluto al inicio del plazo es la deuda original. El capital insoluto al final del plazo es 0 en teoría, sin embargo, debido a la práctica de redondear al centavo más próximo, puede variar ligeramente de 0. *El capital insoluto justamente después de que se ha efectuado un pago es el valor presente de todos los pagos que aún faltan por hacerse.*

TABLA DE AMORTIZACION. Para efectos contables es conveniente preparar una tabla que muestre la distribución de cada pago de la amortización respecto a los intereses que cubre y a la reducción de la deuda.

Ejemplo 2.

Construir una tabla de amortización para la deuda del ejemplo 1.

Período	(*a*) Capital insoluto al principio del período	(*b*) Interés vencido al final del período	(*c*) Pago	(*d*) Capital pagado al final del período
1	5000,00	125,00	907,75	782,75
2	4217,25	105,43	907,75	802,32
3	3414,93	85,37	907,75	822,38
4	2592,55	64,81	907,75	842,94
5	1749,61	43,74	907,75	864,01
6	885,60	22,14	907,75	885,61
Totales		446,49	5446,50	5000,01

La tabla se llena por renglones como sigue: El capital insoluto (*a*) al principio del primer período es la deuda original de \$5000. El interés vencido (*b*) al final de ese mismo período es 5000(0,025) = \$125. El pago semestral (*c*) es \$907,75, de los cuales se utilizan \$125 para el pago del interés vencido y \$907,75 — 125 = \$782,75 se utilizan para el pago del capital (*d*). Al principio del segundo período el capital insoluto (*a*) es 5000 — 782,75 = \$4217,25. Al término de este período, el interés vencido (*b*) es 4217,25(0,025) = \$105,43. Del pago (*c*) de \$907,75, quedan 907,75 — 105,43 = \$802,32 para pago del capital (*d*). Al principio del tercer período, el capital insoluto (*a*) es 4217,25 — 802,32 = \$3414,93 y así sucesivamente.

Cuando tiene que hacerse un gran número de pagos, debe revisarse la tabla ocasionalmente durante su elaboración.

Ejemplo 3.

En el ejemplo 1, hallar el capital insoluto justamente después del 4o. pago y comparar con la cifra de la tabla del ejemplo 2.

El capital insoluto *P* justamente después del 4o. pago es el valor presente de los 6 — 4 = 2 pagos que aún faltan por hacerse. En consecuencia

$$P = 907{,}75\, a_{\overline{2}|.025} = \$1749{,}62$$

INTERES EN EL VALOR DE UN BIEN ADQUIRIDO. Cuando se compra un bien mediante una serie de pagos parciales, el *interés del comprador* del bien, en cualquier tiempo, es aquella parte del precio del bien que ha pagado. Al mismo tiempo, el *interés del vendedor* del bien, es aquel que queda por pagarse, esto es, el capital insoluto en la fecha. Claramente vemos que

$$\text{interés del comprador} + \text{interés del vendedor} = \text{precio de venta}$$

Ejemplo 4.

M compra una casa en \$25.000. Paga \$10.000 de cuota inicial y el saldo lo amortiza con intereses al 6% convertible mensualmente, mediante pagos iguales al final de cada mes en los próximos 10 años. ¿Cuál es el interés justamente después de hacer el 50o. pago periódico?

El pago periódico es $R = 15.000 \dfrac{1}{a_{\overline{120}|.005}} = \$166{,}53$. El capital insoluto justamente después del 50o. pago periódico es 166,53 $a_{\overline{70}|.005}$ = \$9815,18. Del precio de venta de \$25.000, M debe aún \$9815,18. Su interés en la propiedad es 25.000 — 9815,18 = 15.184,82.

Véanse los problemas 1-2.

EXTINCION DE DEUDAS CONSOLIDADAS. Cuando una deuda contraída mediante la emisión de bonos con intereses es amortizada, cada pago se aplica para cubrir los intereses correspondientes vencidos y para redimir un cierto número de bonos. Los pagos periódicos no pueden permanecer iguales, sin embargo tienen que ser lo más similares que sea posible. Por ejemplo, si la denominación de los bonos es \$100 y se dispone de \$712,86, serán redimidos 7 bonos; si se dispone de \$763,49, se redimirán 8 bonos.

Ejemplo 5.

Construir una tabla para la liquidación mediante 6 pagos anuales, lo más iguales posible, de una deuda de \$30.000 contraída mediante la emisión de bonos de \$100 con intereses al 5%.

La deuda de \$30.000 con intereses al 5%, será liquidada mediante 6 pagos anuales *iguales* de

$$R = 30.000 \frac{1}{a_{\overline{6}|.05}} = \$5910{,}52$$

Al término del primer año, el cargo por intereses es 30.000(0,05) = 1500. Quedan disponibles 5910,52 — 1500 = \$4410,52 para el retiro de 44 bonos. Quedan ahora 300 — 44 = 256 bonos que representan un capital insoluto al principio del segundo año de \$25.600. Al final del segundo año, el cargo por intereses es 25.000(0,05) = \$1280. Hay disponibles 5910,52 — 1280 = \$4630,52 para el retiro de 46 bonos. Quedan ahora 256 — 46 = 210 bonos, que representan un capital insoluto al principio del tercer año de \$21.000 y así sucesivamente.

TABLA QUE MUESTRA LOS PAGOS PARA LA EXTINCION DE UNA DEUDA CONSOLIDADA

Período	Capital insoluto al principio del período	Interés vencido	Número de bonos retirados	Pago periódico
1	30.000,00	1500,00	44	5.900,00
2	25.600,00	1280,00	46	5.880,00
3	21.000,00	1050,00	49	5.950,00
4	16.100,00	805,00	51	5.905,00
5	11.000,00	550,00	54	5.950,00
6	5.600,00	280,00	56	5.880,00
Totales		5465,00	300	35.465,00

Véanse los problemas 3-4.

FONDOS DE AMORTIZACION. En el método de fondo de amortización para liquidar una deuda, el acreedor recibe el interés pactado en su vencimiento y el valor nominal de la deuda al término del plazo. Con el objeto de poder hacer el último pago, el deudor crea un fondo por separado en el cual hace depósitos periódicos iguales durante el plazo, de tal forma que justamente después del último depósito, el fondo importa el valor de la deuda original. Es de suponerse que el fondo gana intereses, pero no necesariamente a la misma tasa que carga el acreedor.

Ejemplo 6.

Una deuda de \$5000 con vencimiento al término de 5 años, sin intereses, va a ser liquidada mediante el sistema de fondo de amortización. Si se van a hacer 5 depósitos anuales iguales, el primero con vencimiento en un año, en un fondo donde gana el 3%, hallar el importe de cada depósito.

El monto de los cinco depósitos anuales de *R* cada uno, justamente después de efectuado el último es \$5000; por tanto

$$R\, s_{\overline{5}|.03} = 5000 \quad \text{y} \quad R = 5000 \frac{1}{s_{\overline{5}|.03}} = \$941{,}78$$

Ejemplo 7.

Una deuda de \$5000 que devenga intereses al 5% convertible semestralmente va a ser liquidada mediante el método de fondo de amortización. Si se van a hacer 8 depósitos semestrales iguales, el primero con vencimiento en 6 meses, en un fondo que paga el 3% convertible semestralmente, hallar, (*a*) el importe *R* de cada depósito, y (*b*) el costo semestral *C* de la deuda.

(*a*) $$R = 5000 \frac{1}{s_{\overline{8}|.015}} = \$592{,}92$$

(*b*) El cargo semestral por intereses es 5000(0,025) = \$125. El costo semestral de la deuda es el cargo por intereses más el depósito periódico en el fondo de amortización, en consecuencia

$$C = 125 + 592{,}92 = \$717{,}92$$

TABLA DEL FONDO DE AMORTIZACION. El crecimiento del fondo de amortización del ejemplo 7 se muestra en la siguiente tabla:

TABLA DEL FONDO DE AMORTIZACION

Período	(a) Aumento de interés	(b) Depósito	(c) Incremento al fondo	(d) Importe del fondo al final del período
1	0	592,92	592,92	592,92
2	8,89	592,92	601,81	1194,73
3	17,92	592,92	610,84	1805,57
4	27,08	592,92	620,00	2425,57
5	36,38	592,92	629,30	3054,87
6	45,82	592,92	638,74	3693,61
7	55,40	592,92	648,32	4341,93
8	65,13	592,92	658,05	4999,98
Totales	256,62	4743,36	4999,98	

Al final del primer período se efectúa un depósito (*b*) de \$592,92 y constituye tanto el incremento al fondo (*c*) como el importe del fondo (*d*) al final del primer período. Al final del segundo período el aumento por intereses (*a*) es 592,92(0,015) = \$8,89, el depósito (*b*) es \$592,92 y el incremento en el fondo (*c*) es 8,89 + 592,92 = \$601,81, y el importe del fondo (*d*) es 592,92 + 601,81 = \$1194,73. Al final del tercer período, el aumento por interés (*a*) es 1194,73(0,015) = \$17,92, el depósito (*b*) es \$592,92, el incremento en el fondo (*c*) es 17,92 + 592,92 = \$610,84, y el importe del fondo (*d*) es ahora 1194,73 + 610,84 = \$1805,57, y así sucesivamente.

La diferencia de \$0,02 en la última cifra de (*d*) es debida al redondeo de cada cifra a la centena. Al construir una tabla de fondo de amortización es recomendable comprobar las cifras ocasionalmente.

Ejemplo 8.

En el ejemplo 7, hallar: (*a*) El importe del fondo justamente después del 5o. depósito; (*b*) cuánto del incremento al fondo por el 6o. depósito es debido a intereses.

(*a*) El importe del fondo justamente después del 5o. depósito es $592{,}92\, s_{\overline{5}|0{,}015} = \$3054{,}88$.

(*b*) El aumento por intereses al efectuarse el 6o. depósito es el interés producido en un período por el monto en el fondo justamente después del 5o. depósito, en consecuencia, el incremento es 3054,88(0,015) = \$45,82.

Véanse los problemas 5-6.

DEPRECIACION. En los capítulos 1 y 3 se discutieron algunos métodos para la depreciación de activos físicos. En cada método, se constituye un fondo de depreciación para tener al final de la vida útil del activo la diferencia entre el costo original y el valor de salvamento, en su caso. Si la vida útil del activo es n años, la meta se alcanza por el método lineal del capítulo 1 haciendo n depósitos iguales anuales en un fondo de depreciación. Hay dos objeciones a este simple procedimiento.

La primera objeción está relacionada con el hecho de que la más fuerte depreciación de la mayoría de los activos ocurre durante el primer año de uso y posteriormente la depreciación decrece año tras año, mientras que por el método lineal se supone que es la misma para cada año. Esta objeción fue refutada mediante el método de porcentaje-constante del capítulo 3.

La segunda objeción proviene del hecho de que aun cuando el fondo de depreciación es normalmente utilizado como capital de trabajo por la compañía, no se acredita interés al fondo en ningún método. Esta objeción se refuta con el *método de fondo de amortización*. Designemos con C el costo original, S el valor de salvamento y n (años) la vida útil del activo. Si i es la tasa efectiva ganada por el fondo de depreciación, el depósito anual R en el fondo estará dado por

$$R \cdot s_{\overline{n}|i} = C - S \quad \text{o sea} \quad R = (C-S)\frac{1}{s_{\overline{n}|i}}$$

En esta forma, el incremento anual al fondo será ahora la suma del cargo por depreciación anual R y del interés ganado por el fondo durante el año. Excepto por la columna que nos da el valor en libros del activo, la tabla es la misma que para un fondo de amortización ordinario.

Ejemplo 9.

Se estima que una máquina cuyo costo de nueva es \$4000 tendrá después de 6 años de uso un valor de salvamento de \$400. Si el fondo de depreciación gana el 3% efectivo, aplíquese el método de fondo de amortización para, (*a*) hallar el depósito anual en el fondo, (*b*) hallar el monto del fondo al término del 4o. año, y (*c*) preparar una tabla de depreciación.

(*a*) $C = 4000$, $S = 400$, $n = 6$, $i = 0{,}03$; por tanto

$$R \cdot s_{\overline{6}|0{,}03} = 4000 - 400 = 3600$$

y

$$R = 3600 \frac{1}{s_{\overline{6}|0{,}03}} = 3600(0{,}154598) = \$556{,}55$$

(*b*) Inmediatamente después del 4o. depósito, el monto en el fondo de depreciación es

$$556{,}55\, s_{\overline{4}|0{,}03} = 556{,}55(4{,}18363) = \$2328{,}40$$

(*c*)

Antigüedad	Cargo por depreciación	Interés sobre el fondo	Incremento al fondo	Importe del fondo	Valor en libros
0	0	0	0	0	4000,00
1	556,55	0	556,55	556,55	3443,45
2	556,55	16,70	573,25	1129,80	2870,20
3	556,55	33,89	590,44	1720,24	2279,76
4	556,55	51,61	608,16	2328,40	1671,60
5	556,55	69,85	626,40	2954,80	1045,20
6	556,55	88,64	645,19	3599,99	400,01

El error de \$0,01 en el valor en libros final es debido al redondeo de todas las cifras a dos decimales.

Debe notarse que mientras que el método de fondo de amortización acredita interés al fondo de depreciación, aumentan las otras características objetables del método lineal, ya que ahora el fondo de depreciación se incrementa con cantidades crecientes cada año.

AGOTAMIENTO. La pérdida de valor de una mina o de un pozo petrolero por la extracción gradual de metal o petróleo, de los cuales depende su valor, se conoce como *agotamiento*. El comprador de uno de estos activos espera recibir:

(i) interés a una cierta tasa por su inversión, y

(ii) el rembolso eventual de su inversión original.

En consecuencia, el producto anual del activo debe alcanzar tanto para el interés requerido como para el fondo de amortización (fondo de rembolso), el cual alcanzará el valor de la inversión original menos cualquier valor de salvamento del activo en la fecha en que esté agotado.

Ejemplo 10.

Se estima que una mina producirá un rendimiento anual de $25.000 durante los próximos 20 años, quedando sin valor al término de dicho período. Si el fondo de rembolso gana el $3\frac{1}{2}\%$ efectivo, hallar el precio de compra que proporcione un rendimiento de 5%.

Designemos el precio de compra con V. El rendimiento anual debe proporcionar $0{,}05V$ por intereses y $V\dfrac{1}{s_{\overline{20}|.035}}$ para depósito en el fondo de rembolso, en consecuencia

$$0{,}05V + V\frac{1}{s_{\overline{20}|.035}} = 25.000$$

y

$$V = \frac{25.000}{0{,}05 + \dfrac{1}{s_{\overline{20}|.035}}} = \frac{25.000}{0{,}08536108} = \$292.873{,}52$$

Véanse los problemas 7-8.

Problemas resueltos

1. Un comerciante pide un préstamo de $20.000 para renovar su tienda. Acuerda amortizar su deuda, capital e intereses al 4½%, mediante pagos anuales iguales por los próximos 8 años, el primero con vencimiento en un año. Hallar, (*a*) el costo anual de la deuda, (*b*) el capital insoluto justamente después del 6o. pago, y (*c*) en cuánto se reduce la deuda con el 4o. pago.

(*a*) el pago anual es $R = 20.000\dfrac{1}{a_{\overline{8}|.045}} = \$3032{,}19$.

(*b*) el capital insoluto justamente después del 6o. pago es $3032{,}19\,a_{\overline{2}|.045} = \$5678{,}28$.

(*c*) el capital insoluto justamente después del 3er. pago es $3032{,}19\,a_{\overline{5}|.045} = \$13.311{,}24$. El interés vencido cuando sea hecho el 4o. pago es $13.311{,}24(0{,}045) = \$599{,}01$. El 4o. pago reduce la deuda en $3032{,}19 - 599{,}01 = \$2433{,}18$.

2. Una deuda de $3600 con intereses al 6% convertible semestralmente se va a amortizar mediante pagos semestrales de $900 cada uno, el primero con vencimiento al término de 6 meses, junto con un pago parcial final si fuera necesario. Construir una tabla. Hallar en forma independiente el capital insoluto justamente después del tercer pago.

Tal como en el capítulo 10, tenemos

$$900\,a_{\overline{n}|.03} = 3600 \qquad \text{y} \qquad a_{\overline{n}|.03} = 4$$

por lo que, aplicando la tabla XIII, vemos que se requieren 4 pagos completos. La construcción de la tabla es similar a la del ejemplo 2.

Período	Capital insoluto al principio del período	Interés vencido al final del período	Pago	Capital pagado al final del período
1	3600,00	108,00	900,00	792,00
2	2808,00	84,24	900,00	815,76
3	1992,24	59,77	900,00	840,23
4	1152,01	34,56	900,00	865,44
5	286,57	8,60	295,17	286,57
Totales		295,17	3895,17	3600,00

El capital insoluto requerido puede encontrarse sin que sea necesario determinar primero el pago final (parcial). De la línea de tiempo

tenemos que el capital insoluto P justamente después del tercer pago es

$$P = 3600(1{,}03)^3 - 900\,s_{\overline{3}|.03}$$
$$= 3600(1{,}092727) - 900(3{,}09090) = \$1152{,}01$$

3. Una deuda de $500.000 distribuida en 100 bonos de $1000, 500 bonos de $500 y 1500 bonos de $100 que pagan intereses de 4% convertible semestralmente, será amortizada en los próximos 5 años mediante pagos semestrales lo más iguales posible. Construir una tabla.

Si los pagos semestrales fueran iguales, cada uno sería de

$$R = 500.000\frac{1}{a_{\overline{10}|.02}} = \$55.663{,}26$$

No hay ninguna estipulación sobre la distribución de la suma disponible en cualquier período entre las tres denominaciones. En la tabla dada a continuación, $35.000 de la suma disponible se han utilizado para redimir 10 de los bonos de $1000 y 50 de los bonos de $500.

Período	Capital insoluto	Interés vencido	Número de bonos redimidos $1000	$500	$100	Pago semestral
1	500.000,00	10.000,00	10	50	107	55.700,00
2	454.300,00	9.086,00	10	50	116	55.686,00
3	407.700,00	8.154,00	10	50	125	55.654,00
4	360.200,00	7.204,00	10	50	135	55.704,00
5	311.700,00	6.234,00	10	50	144	55.634,00
6	262.300,00	5.246,00	10	50	154	55.646,00
7	211.900,00	4.238,00	10	50	164	55.638,00
8	160.500,00	3.210,00	10	50	175	55.710,00
9	108.000,00	2.160,00	10	50	185	55.660,00
10	54.500,00	1.090,00	10	50	195	55.590,00
Totales		56.622,00	100	500	1500	556.622,00

4. Una deuda de $100.000 en forma de bonos de $1000 que devengan intereses al 3% se amortizarán durante los próximos 5 años mediante pagos anuales lo más iguales posible. Los bonos están cotizados en el mercado de valores a 90. Construir una tabla.

Decir que un bono está cotizado en 90 significa que un bono de $1000 puede ser comprado en $900. En consecuencia, el valor presente de la deuda es $90.000 y la tasa de interés es $\dfrac{\text{pago por interés}}{\text{precio}} = \dfrac{30}{900} = 0{,}03\frac{1}{3}$. El pago semestral igual, necesario para liquidar la deuda sería

$$R = 90.000\frac{1}{a_{\overline{5}|.03\frac{1}{3}}} = 90.000\left\{\frac{1}{a_{\overline{5}|.03}} + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{a_{\overline{5}|.035}} - \frac{1}{a_{\overline{5}|.03}}\right]\right\}$$
$$= 90.000(0{,}2204391) = \$19.839{,}52$$

interpolando en la tabla XIV.

El interés vencido al final del primer año es 100.000(0,03) = \$3000. Quedan disponibles 19.839,52 — 3000 = 16.839,52 con lo cual pueden redimirse 19 bonos de \$900 cada uno. La tabla completa es la siguiente

Período	Capital insoluto	Interés vencido	Número de bonos adquiridos	Costo de los bonos	Pago total anual
1	100.000,00	3.000,00	19	17.100,00	20.100,00
2	81.000,00	2.430,00	19	17.100,00	19.530,00
3	62.000,00	1.860,00	20	18.000,00	19.860,00
4	42.000,00	1.260,00	21	18.900,00	20.160,00
5	21.000,00	630,00	21	18.900,00	19.530,00
Totales		9.180,00		90.000,00	99.180,00

5. La compañía XYZ obtiene un préstamo de \$10.000 por 5 años al 6% convertible semestralmente. Con el objeto de pagar el capital al término de los 5 años, se establece en una cuenta de ahorros que paga el 4% convertible semestralmente, un fondo de amortización mediante depósitos semestrales iguales, el primero con vencimiento en 6 meses. Hallar, (*a*) el costo semestral de la deuda, (*b*) la tasa nominal convertible semestralmente que la compañía está pagando para liquidar la deuda.

(*a*) El cargo por intereses es 10.000(0,03) = \$300.

El depósito periódico en el fondo de amortización es $10.000\,\dfrac{1}{s_{\overline{10}|.02}} = \$913{,}27$.

El costo semestral de la deuda es 300 + 913,27 = \$1213,27.

(*b*) En lugar de pagar ahora \$10.000 la compañía XYZ paga \$1213,27 al final de cada 6 meses durante los próximos 5 años. Sea la tasa nominal requerida $2i$ convertible semestralmente. Tenemos que

$$1213{,}27\, a_{\overline{10}|i} = 10.000 \quad \text{o sea} \quad \frac{1}{a_{\overline{10}|i}} = \frac{1213{,}27}{10.000} = 0{,}121327$$

Interpolando en la tabla XIV, i = 0,03677 y la tasa requerida es 7,35% convertible semestralmente.

6. M desea un préstamo de \$20.000 a 6 años. El Banco Nacional, presta el dinero al $5\frac{1}{2}$% si la deuda se amortiza en anualidades. El Banco Regional presta el dinero al 5% si el interés se paga anualmente y el capital al término de 6 años. Si se establece un fondo de amortización, pagando el 3% mediante depósitos anuales iguales, el primero con vencimiento en 1 año, ¿qué plan es más barato y cuánto se ahorraría anualmente aceptándolo?

Si se utiliza el plan del Banco Nacional, el costo anual de la deuda sería

$$R_1 = 20.000\,\frac{1}{a_{\overline{6}|.055}} = \$4003{,}58$$

Si se utiliza el plan del Banco Regional, el costo anual de la deuda sería

$$R_2 = 20.000(0{,}05) + 20.000\,\frac{1}{s_{\overline{6}|.03}} = \$4091{,}95$$

El plan del Banco Nacional es 4091,95 − 4003,58 = \$88,37 más barato anualmente.

7. Resolver el ejemplo 10 si al término de 20 años la propiedad puede ser vendida en \$5000.

Sea V el precio de compra requerido. En este caso el cargo por intereses es $0{,}05V$ mientras que el fondo de rembolso debe acumular la diferencia entre el costo original V y el valor de reventa, esto es $V - 5000$. Por tanto

$$0{,}05V + (V - 5000)\frac{1}{s_{\overline{20}|.035}} = 25.000$$

y

$$V = \frac{25.000 + 5000\dfrac{1}{s_{\overline{20}|.035}}}{0{,}05 + \dfrac{1}{s_{\overline{20}|.035}}} = \frac{25.000 + 5000(0{,}035361)}{0{,}08536108} = \$294.944{,}72$$

8. Se estima que una mina tendrá un rendimiento neto anual de \$75.000 en los próximos 10 años, al término de los cuales podrá venderse en \$10.000. Hallar el rendimiento anual que obtendría un comprador sobre su inversión si paga \$375.000 por la mina y el fondo de rembolso se acumula al 4%.

Designemos con r el rendimiento anual requerido. El interés ganado por el inversionista es 375.000 y el depósito anual en el fondo de rembolso es $365.000\,\dfrac{1}{s_{\overline{10}|.04}}$. Por lo cual

$$375.000r + 365.000\,\frac{1}{s_{\overline{10}|.04}} = 75.000 \qquad \text{y} \qquad r = \frac{75.000 - 365.000\dfrac{1}{s_{\overline{10}|.04}}}{375.000} = 11{,}89\%$$

Problemas propuestos

9. Hallar el pago anual necesario para amortizar una deuda de \$5000 con intereses al $4\frac{1}{2}$%, en 12 años. *Resp.* \$548,33

10. Hallar el pago trimestral que debe hacer M para amortizar una deuda de \$5000 con intereses al 4% convertible trimestralmente, en 10 años. *Resp.* \$152,28

11. Una deuda de \$10.000 con intereses al 6% convertible trimestralmente está siendo amortizada mediante pagos trimestrales iguales durante los próximos 8 años. Hallar, (*a*) el capital insoluto justamente después del 12o. pago, (*b*) el capital insoluto justamente antes del 15o. pago, (*c*) la distribución del 20o. pago respecto al pago de interés y a la reducción del capital. *Resp.* (*a*) \$6794,83; (*b*) \$6295,77; (*c*) \$69,64; \$326,13

12. Una persona obtiene un préstamo de \$10.000 con intereses al $3\frac{1}{2}$%. La deuda será liquidada mediante un pago de \$2500 al término de 4 años, seguido de 6 pagos anuales iguales. (*a*) Hallar el pago periódico necesario. (*b*) Hallar el capital insoluto justamente después del tercer pago periódico. (*c*) ¿Qué parte del último pago se aplica al pago de intereses? *Resp.* (*a*) \$1684,36; (*b*) \$4718,96; (*c*) \$56,96

13. Construir una tabla para la amortización de
(*a*) una deuda de \$4000 con intereses al 4%, mediante 5 pagos anuales iguales.
(*b*) una deuda de \$6000 con intereses al 6% convertible semestralmente, mediante 6 pagos semestrales iguales.

14. Construir una tabla para el pago de una deuda de \$200.000, en bonos de \$1000 que devengan intereses al 3%, durante un período de 5 años, procurando que el costo anual sea lo más igual posible.

15. Construir una tabla para el pago de 5 bonos de $10.000 cada uno, 20 bonos de $1000 cada uno, 35 bonos de $500 cada uno y 125 bonos de $100 cada uno, pagando 4% por los próximos 6 años, procurando que el costo anual sea lo más igual posible.

16. Hallar el importe del depósito anual que es necesario hacer en un fondo de amortización que paga el $4\frac{1}{2}$% efectivo, para liquidar una deuda de $25.000 con vencimiento en 10 años. *Resp.* $2034,47

17. Una empresa obtiene un préstamo de $50.000 a 10 años, acordando pagar intereses de 5% al final de cada año, y al mismo tiempo, establecer un fondo de amortización para el pago del capital. (*a*) Hallar el costo anual de la deuda si el fondo paga el $3\frac{1}{2}$%. (*b*) ¿Cuánto habrá en el fondo justamente después del 7o. depósito? (*c*) ¿Qué tanto del incremento al fondo en la fecha del 5o. depósito es debido a intereses? *Resp.* (*a*) $6762,07; (*b*) $33.156,38; (*c*) $628,75

18. Una deuda de $75.000 va a ser liquidada al término de 20 años, teniéndose que pagar intereses de 4% convertible trimestralmente, cada tres meses. Puede establecerse un fondo de amortización mediante depósitos trimestrales iguales, el primero de los cuales vencería en tres meses, ganando el fondo intereses de 3% convertible trimestralmente. Hallar, (*a*) el costo trimestral de la deuda, (*b*) la tasa nominal convertible trimestralmente a la cual podría ser amortizada la deuda con el mismo gasto trimestral. *Resp.* (*a*) $1437,62; (*b*) 4,62%

19. El 1o. de junio de 1960, una institución empezó a hacer depósitos anuales de R cada uno en un fondo que produce el 3% efectivo, para poder disponer de $15.000 anuales durante los siguientes 5 años, con los cuales redimirá unos bonos emitidos. Los primeros bonos vencen el 1o. de junio de 1970. Hallar R si el último depósito en el fondo se hace, (*a*) el 1o. de junio de 1970, (*b*) el 1o. de junio de 1974.

Sugerencia. (*a*) $R = 15.000(1 + a_{\overline{4}|.03})\dfrac{1}{s_{\overline{11}|.03}}$ (*b*) $R = 15.000\, s_{\overline{5}|.03}\dfrac{1}{s_{\overline{15}|.03}}$

20. Construir una tabla para acumular, (*a*) $6000 mediante depósitos anuales iguales, al término de cada uno de los próximos 4 años, en un fondo que produce el 3% efectivo, (*b*) $8000 mediante depósitos anuales iguales, al término de cada uno de los próximos 5 años en un fondo que produce el $2\frac{1}{2}$% efectivo.

21. Una cierta maquinaria cuyo costo es $1500, se estima que tendrá una vida útil de 5 años y al término de dicho período un valor de salvamento de $200. Preparar una tabla de depreciación utilizando el método de fondo de amortización con intereses al 5%.

22. Para depreciar una maquinaria, cuyo valor es $40.000 y un valor de salvamento de $5000, al término de 25 años, se utiliza el método de fondo de amortización, con intereses al 4%. Hallar el valor en libros al término de 15 años.
Resp. $23.171,27

23. Se estima que una máquina con costo de $6400 tendrá una vida útil de 8 años y al término de los cuales un valor de salvamento de $400. Hallar el valor en libros al final del 5o. año si se utiliza el método de fondo de amortización con intereses al 3%. *Resp.* $2817,71

24. Se espera que una mina de carbón tenga un rendimiento anual de $30.000 por los próximos 25 años. Hallar el precio de compra sobre la base de un rendimiento de 7% anual, suponiendo que el fondo de rembolso produce el 4%.
Resp. $319.108,33

25. Se estima que el rendimiento anual de un pozo petrolero será de $75.000 y que al término de 15 años el pozo no tendrá valor alguno. Hallar el precio que debe pagarse por el pozo para que produzca un 10% sobre la inversión, si puede disponerse de un fondo de amortización que produce el 3%. *Resp.* $487.752,28

26. M paga $25.000 por los derechos sobre la patente de un invento, por 10 años. Si puede acumularse un fondo de amortización al $3\frac{1}{2}$%, ¿qué ingreso anual le producirá 8% sobre su inversión? *Resp.* $4131,04

27. Se espera que una mina de carbón con costo de $225.000 produzca un ingreso anual de $25.000 en los próximos 20 años. Suponiendo que puede establecerse un fondo de amortización con rendimiento de 4%, ¿qué tasa de interés ganará el comprador? *Resp.* $7\frac{3}{4}$%

28. Una cierta maquinaria avaluada en $3000 tiene una vida útil de 3 años, produce 250 unidades anuales, y se gastan $750 anuales por mantenimiento. Hallar el costo unitario de producción C, si se desea un rendimiento de 4% sobre la inversión.

Sugerencia. El costo total anual es la sumatoria del costo anual del mantenimiento, del interés sobre la inversión y del cargo anual por depreciación. Por tanto

$$C = \frac{750 + 3000(0.04) + 3000\dfrac{1}{s_{\overline{3}|.04}}}{250}$$

29. Un comprador puede escoger entre dos máquinas: La primera produce 100 unidades anuales, cuesta $2000, tiene una vida útil de 8 años y requiere $600 anuales para mantenimiento; la segunda, produce 125 unidades anuales, cuesta $2500, la vida útil es de 10 años y requiere $750 anuales para mantenimiento. Comparar el costo unitario en cada máquina suponiendo que se desea un rendimiento de $3\frac{1}{2}$%.

30. La maquinaria del problema 28 puede ser reacondicionada en tal forma que su vida útil sea de 5 años. Si en estas condiciones produce 300 unidades anuales y se necesitan únicamente $500 anuales para mantenimiento, ¿cuánto debe estar dispuesto a gastar el propietario en el reacondicionamiento, sobre la base de 4%?

Resp. $\left\{400 + 3600\dfrac{1}{a_{\overline{3}|.04}}\right\} a_{\overline{5}|.04} - 3000$

31. Un préstamo de $4500 va a ser amortizado en los próximos 10 años mediante pagos mensuales iguales. La tasa de interés es 3% convertible mensualmente durante los primeros 4 años y luego el 4% convertible mensualmente. Hallar el pago mensual.

Resp. $\dfrac{4500}{a_{\overline{48}|.00\,1/4} + a_{\overline{72}|.00\,1/3}(1.00\frac{1}{4})^{-48}}$

32. Demostrar que cuando un fondo de amortización puede ser acumulado a la misma tasa de interés que se está pagando por la deuda, el costo periódico de la deuda es igual al cargo periódico por amortización.

33. Una deuda está siendo amortizada al 5% mediante pagos de $500 anuales. Si el capital insoluto es $9282,57 justamente después del k-ésimo pago, (*a*) ¿cuánto era justamente después del $(k-1)$ pago?, (*b*) ¿cuánto será justamente después del $(k+1)$ pago? No usar tablas. *Resp.* (*a*) $9316,73; (*b*) $9246,70

34. Un fondo de amortización está siendo acumulado al 3% mediante depósitos de $300 anuales. Si el fondo tiene $10.327,94 justamente después del k-ésimo depósito, (*a*) ¿cuánto tendrá justamente después del $(k-1)$ depósito?, (*b*) ¿cuánto tendrá justamente después del $(k+1)$ depósito? No usar tablas. *Resp.* (*a*) $9.735,86, (*b*) $10.937,78

35. Si una deuda A con intereses a la tasa i por período de interés está siendo amortizada mediante n pagos de R cada uno, demostrar que el capital insoluto justamente después del k-ésimo pago es

$$A(1+i)^k - R\, s_{\overline{k}|i}$$

36. Si en el problema 35, A es el precio de compra de un activo, demostrar que el interés del comprador por el activo, justamente después del k-ésimo pago es

$$(R - Ai)\, s_{\overline{k}|i}$$

Capítulo 12

Bonos

UN BONO es una promesa escrita de pago de

(*a*) una suma fija llamada *valor de redención*, en una fecha dada llamada *fecha de redención*.

(*b*) pagos periódicos llamados *pagos de intereses*, hasta la fecha de redención.

La descripción completa de un bono comprende

(i) su denominación o *valor nominal*. Casi invariablemente es un múltiplo de $100.

(ii) la *tasa de interés*. Por ejemplo, 6% pagadero el 1o. de febrero y el 1o. de agosto; abreviando sería el "6%, FA".

(iii) la fecha de redención, por ejemplo el 1o. de octubre de 1985. Normalmente se redime un bono en una fecha de pago de intereses.

(iv) el valor de redención. Cuando el valor de redención y el valor nominal son idénticos se dice que el bono es redimible *a la par*. De otra forma, el valor de redención se expresa como un porcentaje del valor nominal, omitiéndose la palabra "por ciento". Por ejemplo, un bono de $1000 redimible en $1050 se expresa como "un bono de $1000 redimible a 105".

Ejemplo 1.

Un bono de $500, 4% EAJO, redimible el 1o. de octubre de 1990 a 102, estipula

(*a*) el pago de $500(1,02) = $510 el 1o. de octubre de 1990.

(*b*) pagos trimestrales de 500(0,01) = $5 los días 1o. de enero, 1o. de abril, 1o. de julio y 1o. de octubre de cada año, desde su emisión hasta el 1o. de octubre de 1990 inclusive.

PRECIO DEL BONO EN UNA FECHA DE PAGO DE INTERESES. Si un inversionista compra un bono en una fecha de pago de intereses, adquiere el derecho de recibir ciertos pagos *futuros*. *No recibirá el pago de interés vencido en la fecha de la compra.*

Ejemplo 2.

Un inversionista que compró el 1o. de enero de 1960 un bono de $1000, 5%, EJ, redimible a la par el 1o. de julio de 1988 recibirá

(*a*) $1000 el 1o. de julio de 1988.

(*b*) 57 pagos semestrales de $25 cada uno, el primero con vencimiento el 1o. de julio de 1960.

Si un bono redimible a la par es comprado en una fecha de pago de intereses a su valor nominal, el inversionista ganará precisamente la tasa de interés estipulada en el bono. Si desea obtener una tasa mayor, debe comprar el bono a un precio más bajo que el valor nominal; si está dispuesto a ganar una tasa menor, estará dispuesto a pagar un precio arriba del valor nominal.

Ejemplo 3.

Un bono de $1000, 4%, MS, redimible a la par el 1o. de septiembre de 1997, es comprado el 1o. de marzo de 1962 con el propósito de ganar el 5% convertible semestralmente. Hallar el precio de compra *P*.

El comprador recibirá:

(*a*) $1000 el 1o. de septiembre de 1997.

(*b*) 71 pagos semestrales de $20 cada uno, siendo el primero el 1o. de septiembre de 1962. En el siguiente diagrama vemos que

$$P = 1000(1{,}025)^{-71} + 20\, a_{\overline{71}|.025}$$
$$= 1000(0{,}173223) + 20(33{,}0711) = \$834{,}64$$

Véanse los problemas 1-2.

FORMULAS. Sea F el valor nominal y V el valor de redención de un bono. Sea r la tasa de interés por período de interés del bono, i la tasa del inversionista por período y n el número de períodos de interés desde la fecha de compra (suponiendo que coincide con una fecha de pago de intereses) hasta la fecha de redención. El precio de compra P está dado por

$$P = V(1+i)^{-n} + Fr\, a_{\overline{n}|i} \qquad (1)$$

Esta fórmula requiere el uso de dos tablas. En el problema 3, se desarrollan las siguientes dos fórmulas:

$$P = \frac{Fr}{i} + \left(V - \frac{Fr}{i}\right)(1+i)^{-n} \qquad (2)$$

y

$$P = V + (Fr - Vi)\, a_{\overline{n}|i} \qquad (3)$$

Ambas tienen la ventaja de requerir el uso de una sola tabla. Su aplicación es opcional.

Véase el problema 4.

COMPRA A PREMIO O DESCUENTO. Se dice que un bono es comprado a *premio* si su precio de compra P es mayor que su valor de redención V. El premio es $P - V$.

Se dice que un bono es comprado a descuento si su precio de compra P es menor que su valor de redención V. El descuento es $V - P$.

Ejemplo 4.

El bono del ejemplo 3 fue comprado con descuento de 1000 — 834,64 = $165,36. El bono del problema 1 fue comprado a premio de 1147,28 — 1000 = $147,28.

El *valor en libros* de un bono en cualquier fecha es la suma invertida en el bono en dicha fecha. El valor en libros de un bono en la fecha de su compra (suponiendo que coincide con una fecha de pago de intereses) es el precio de compra; el valor en libros en la fecha de redención es el valor de redención. El cambio del valor en libros durante la vida del bono se muestra con claridad construyendo una tabla de inversión.

Ejemplo 5.

Un bono de $1000, 4% EJ, redimible a la par el 1o. de enero de 1967 es comprado el 1o. de julio de 1964, para que reditúe el 6% convertible semestralmente. Construir una tabla de inversión.

El precio de compra del bono es

$$P = 1000(1{,}03)^{-5} + 20\, a_{\overline{5}|.03} = \$954{,}20$$

El 1o. de julio de 1964 el valor en libros del bono es $954,20. Al término del primer período de intereses, el interés vencido sobre el valor en libros es $954,20(0,03) = $28,63, mientras que el pago por intereses del bono es $20. Por tanto

$28{,}63 - 20 = \$8{,}63$ del interés vencido no se cobra, por lo cual puede decir el inversionista que tiene $8,63 más, invertidos en el bono, que lo que tenía al principio del período. El nuevo valor en libros del bono es $954{,}20 + 8{,}63 = \$962{,}83$.

Al final del segundo período de interés, el interés vencido es $962{,}83(0{,}03) = \$28{,}88$, el pago de intereses del bono es $20, y el nuevo valor en libros es $962{,}83 + 8{,}88 = \$971{,}71$ y así sucesivamente.

Período	Valor en libros al principio del período	Intereses vencidos sobre el valor en libros	Pago de intereses del bono	Cambio del valor en libros
1	954,20	28,63	20,00	8,63
2	962,83	28,88	20,00	8,88
3	971,71	29,15	20,00	9,15
4	980,86	29,43	20,00	9,43
5	990,29	29,71	20,00	9,71
6	1000,00			
Totales		145,80	100,00	45,80

El valor en libros al principio de cualquier período es simplemente el precio al cual el bono debe ser comprado para que produzca el rendimiento deseado por el inversionista. Puede ser calculado en forma independiente, varias veces, como un método de comprobación de la tabla.

Puesto que el bono del ejemplo 5 fue comprado con descuento, es costumbre utilizar el término *acumulando el descuento* para llevar el valor en libros hasta el valor de redención. Véase el problema 5 para la tabla de inversión de un bono comprado a premio.

PRECIO DEL BONO COMPRADO ENTRE FECHAS DE PAGO DE INTERESES. Para hallar el precio de compra de un bono entre dos fechas de pago de intereses, que produzca un cierto rendimiento:

(*a*) hallar el precio de compra en la última fecha que se pagó intereses,

(*b*) acumular la suma encontrada en (*a*) a *interés simple* (aplicando la tasa de interés del comprador) hasta la fecha de compra.

Ejemplo 6.

Un bono de $1000, $4\frac{1}{2}\%$, EJ, redimible a 105 el 1o. de enero de 1985, se compra el 20 de septiembre de 1962, esperando un rendimiento de 6% convertible semestralmente. Hallar el precio de compra P y el valor en libros del bono.

La fecha de pago de intereses inmediata anterior al 20 de septiembre de 1962, es el 1o. de julio de 1962. El precio de compra en dicha fecha, que proporcionaría un rendimiento de 6% convertible semestralmente es

$$P_1 = 1050(1{,}03)^{-45} + 22{,}50\, a_{\overline{45}|,03} = \$829{,}33$$

Esta cantidad se acumula del 1o. de julio de 1962 al 20 de septiembre de 1962, (81 días exactamente) al 6% de interés simple. Por tanto

$$P = P_1\left[1 + 0{,}06\left(\frac{81}{360}\right)\right] = 829{,}33(1{,}0135) = \$840{,}53$$

El valor en libros del bono el 20 de septiembre de 1962, no es el precio de compra. El vendedor del bono lo ha conservado por 81 días después del último pago de intereses y por tanto, está obligado a participar del siguiente pago de intereses. Esta parte fraccionada del pago de intereses, $\frac{81}{180}(22{,}50) = \$10{,}12$, es conocida como interés redituable. El comprador debe considerar que este interés redituable está incluido en el precio de compra, por lo que el valor en libros del bono, al 20 de septiembre de 1962 es

$$\text{precio de compra} - \text{interés redituable} = 840{,}53 - 10{,}12 = \$830{,}41$$

Véanse los problemas 6-7.

EL PRECIO COTIZADO DE UN BONO. El problema tratado anteriormente es hallar el precio que el comprador debe pagar por un bono dado, con el objeto que gane la tasa de interés deseada. En cierto sentido, el problema es un tanto académico, ya que no hay seguridad que un bono en particular pueda ser comprado al precio requerido. Más importante es el problema de determinar la tasa de interés que obtendrá el comprador, si compra un bono determinado a un precio dado y lo conserva hasta su redención.

Los bonos son generalmente ofrecidos al "precio cotizado", expresado como un porcentaje del valor nominal, sin embargo el término por ciento se omite. Por ejemplo, un bono de $1000 cuyo precio cotizado es $975 estaría cotizado a $97\frac{1}{2}$. El precio cotizado generalmente no es el precio que paga el comprador. El precio cotizado es lo que previamente se ha designado como valor en libros. Será el precio de compra únicamente si ha sido cotizado en una fecha de pago de intereses. El precio de compra (más conocido como *precio neto*) es el precio cotizado más el interés redituable.

Ejemplo 7.

Un bono de $1000, $3\frac{1}{2}\%$, MS se redimirá el 1o. de marzo de 1975. Hallar el precio neto al 14 de junio de 1962, si ha sido cotizado a $95\frac{3}{4}$.

El precio cotizado es $957,50; el pago de intereses es $17,50. Del 1o. de marzo de 1962 al 14 de junio de 1962 son 105 días; el interés redituable es $\frac{105}{180}(17{,}50) = \$10{,}21$. El precio neto es $957{,}40 + 10{,}21 = \$967{,}71$.

Puesto que el comprador paga el precio cotizado más el interés redituable, el precio cotizado también se conoce como *precio con intereses*.

Véase el problema 8.

TASA DE REDITUABILIDAD. Las instituciones de inversión utilizan tablas con las cuales puede ser obtenida la tasa de redituabilidad ya sea en forma directa o mediante interpolación. Dichas tablas son muy voluminosas para ser incluidas aquí. En sustitución daremos dos métodos para obtener aproximadamente la tasa de redituabilidad.

(*a*) *Método de promedios.* La tasa de redituabilidad por período de intereses es aproximadamente igual a

$$\frac{\text{producto promedio por período}}{\text{valor promedio en libros}}$$

Ejemplo 8.

Un bono de $1000, 6%, EJ, redimible a 110 el 1o. de julio de 1987, está cotizado en 125 al 1o. de enero de 1962. Hallar por el método de promedios la tasa de redituabilidad suponiendo que es comprado en la fecha mencionada.

En la fecha de compra, el valor en libros del bono es $1250 y en la fecha de redención será $1100. El valor promedio en libros es

$$\tfrac{1}{2}(1250 + 1100) = \$1175$$

Si se conserva el bono hasta su redención, el comprador recibirá 51 pagos de intereses de $30 cada uno, además del valor de redención de $1100, esto es $2630. Puesto que paga $1250 por el bono, el producto total durante los 51 períodos de interés es $2630 - 1250 = \$1380$ y el producto promedio por período es $1380/51 = \$27{,}06$. La tasa por período de interés es $27{,}06/1175 = 0{,}023$, aproximadamente, y la tasa de redituabilidad es 4,6% convertible semestralmente.

(*b*) *Método de interpolación.* Este método requiere del precio de compra del bono sobre la base de dos tasas de intereses, en tal forma que un precio sea menor y otro mayor al precio cotizado dado. En esencia, estamos calculando las cifras que necesitamos, correspondientes a las tablas mencionadas para bonos.

Ejemplo 9

Aproximar mediante el método de interpolación la tasa de redituabilidad del bono del ejemplo 8.

En el ejemplo 8 se obtuvo mediante una simple aproximación la tasa de 4,6% convertible semestralmente. Las tablas V y XIII nos permiten hallar rápidamente los precios de compra que reditúen 4% y 5% convertible semestralmente al 1o. de enero de 1962, designadas por

$$P = 1100(1{,}02)^{-31} + 30\, a_{\overline{31}|.02} = \$1354{,}30$$

y

$$Q = 1100(1{,}025)^{-31} + 30\, a_{\overline{31}|.025} = \$1171{,}62$$

Interpolando entre estos dos valores, tenemos

$$0{,}005\left[\begin{array}{l}0{,}02\\ i\\ 0{,}025\end{array}\right] x \qquad -182{,}68\left[\begin{array}{l}1354{,}30\\ 1250{,}00\\ 1171{,}62\end{array}\right] -104{,}30$$

$$x = \frac{104{,}30}{182{,}68}(0{,}005) = 0{,}00285$$

$$i = 0{,}02 + 0{,}00285 = 0{,}02285$$

y la tasa de redituabilidad es 4,57% convertible semestralmente.

En el ejemplo 9 la interpolación ha estado entre las tasas de 2% y $2\frac{1}{2}$% disponibles en nuestras tablas. Estrechando estos límites, obtendríamos mayor precisión, el problema es que debemos utilizar logaritmos en los cálculos.

Ejemplo 10.

Aproximar la tasa de redituabilidad del bono del ejemplo 8 utilizando para la interpolación las tasas de $2\frac{1}{4}$% y 2,3% por período de interés.

Tenemos

$$P = 1100(1{,}0225)^{-31} + 30\frac{1-(1{,}0225)^{-31}}{0{,}0225} = 353{,}64 + 904{,}68 = \$1258{,}32$$

y

$$Q = 1100(1{,}023)^{-31} + 30\frac{1-(1{,}023)^{-31}}{0{,}023} = 344{,}93 + 895{,}33 = \$1240{,}26$$

Interpolando

$$0{,}0005\left[\begin{array}{l}0{,}0225\\ i\\ 0{,}023\end{array}\right] x \qquad -18{,}06\left[\begin{array}{l}1258{,}32\\ 1250{,}00\\ 1240{,}26\end{array}\right] -8{,}32$$

$$x = \frac{8{,}32}{18{,}06}(0{,}0005) = 0{,}00023$$

$$i = 0{,}0225 + 0{,}00023 = 0{,}02273$$

y la tasa de redituabilidad es 4,546% convertible semestralmente.

Véase el problema 9.

BONOS CON FECHA OPCIONAL DE REDENCION. Con el objeto de estar en posición de tomar ventaja de cualquier futura baja en la tasa de interés, en ocasiones las compañías emiten bonos previendo que pueden ser redimidos antes de la fecha normal de redención. Al calcular el precio que se está dispuesto a pagar por ellos, el inversionista debe suponer la fecha de redención más desfavorable para él. De esta forma tendrá la certeza de obtener la redituabilidad deseada y quizá más.

Ejemplo 11.

Un bono de \$1000, 6%, MS, será redimido a la par el 1o. de septiembre de 1988, sin embargo, puede ser redimido a la par el 1o. de septiembre de 1973 o en cualquier fecha de pago de intereses posterior. Hallar, (*a*) el precio de compra y el valor en libros al 12 de mayo de 1962, que reditúe por lo menos 4% convertible semestralmente, (*b*) la utilidad del inversionista, (*c*) la tasa de redituabilidad si el bono es redimido el 1o. de septiembre de 1980.

En este caso la tasa estipulada en el bono excede la tasa de redituabilidad deseada por lo que el bono será comprado a premio. El valor en libros del bono se reduce gradualmente hasta que alcanza el valor nominal en la fecha de redención (véase el problema 5). El inversionista debe calcular el precio con la suposición de que el bono será redimido en la fecha más próxima (1o. de septiembre de 1973) ya que de otra forma el valor en libros sería mayor que el valor de redención, si el bono se redimiera en dicha fecha.

(*a*) Al 1o. de marzo de 1962, el precio de compra que reditúa 4% convertible semestralmente es

$$P_1 = 1000(1{,}02)^{-23} + 30\, a_{\overline{23}|.02} = \$1182{,}93$$

y al 12 de mayo de 1962 es

$$P = P_1\left[1 + 0{,}02\left(\frac{72}{180}\right)\right] = 1182{,}93(1{,}008) = \$1192{,}39$$

El valor en libros al 12 de mayo de 1962 es 1192,39 — $30(\frac{2}{5})$ = \$1180,39.

(*b*) El valor en libros al 1o. de septiembre de 1973 debe haber llegado a \$1000. En cada fecha posterior de pago de intereses, el inversionista recibirá 30 — 20 = \$10 en exceso de la recuperación esperada. Al 1o. de septiembre de 1980, el monto de dichos excesos es $10\, s_{\overline{14}|.02}$ = \$159,74.

(*c*) Tomando como fecha de redención el 1o. de septiembre de 1980, el precio de compra del bono que reditúa 5% convertible semestralmente es

$$P_1 = [1000(1{,}025)^{-37} + 30\, a_{\overline{37}|.025}]\left[1 + 0{,}025\left(\frac{72}{180}\right)\right]$$
$$= 1119{,}79(1{,}01) = \$1130{,}99$$

y para que reditúe 4% convertible semestralmente sería

$$P_2 = [1000(1{,}02)^{-37} + 30\, a_{\overline{37}|.02}]\left[1 + 0{,}02\left(\frac{72}{180}\right)\right]$$
$$= 1259{,}69(1{,}008) = \$1269{,}77$$

Los valores en libros respectivos serían

$$Q_1 = 1130{,}99 - 30(2/5) = \$1118{,}99$$

y

$$Q_2 = 1269{,}77 - 30(2/5) = \$1257{,}77$$

Por lo cual

$$0{,}005\left[\begin{array}{l}0{,}02\\ i\\ 0{,}025\end{array}\right] x \qquad -138{,}78\left[\begin{array}{l}1257{,}77\\ 1180{,}39\\ 1118{,}99\end{array}\right] -77{,}38$$

$$x = \frac{77{,}38}{138{,}78}(0{,}005) = 0{,}00279$$

$$i = 0{,}02 + 0{,}00279 = 0{,}02279$$

y la tasa de redituabilidad requerida es 4,558% convertible semestralmente.

Véase el problema 10.

UN BONO DE ANUALIDAD de valor nominal F, es un contrato para el pago de una anualidad cuyo valor presente a la tasa del bono es F.

Ejemplo 12.

Un bono de anualidad a 15 años por \$20.000, con intereses al 6% convertible semestralmente será liquidado en 30 pagos semestrales iguales, el primero con vencimiento en 6 meses. Hallar el precio de compra al término del 5o. año, para ganar el 5% convertible semestralmente.

El pago periódico es $20.000\,\dfrac{1}{a_{\overline{30}|.03}} = \$1020{,}39.$

El comprador está comprando el derecho de cobrar los restantes 20 pagos, el primero de los cuales vence en 6 meses. Por tanto el precio que redituará 5% convertible semestralmente es

$$P = 1020{,}39\, a_{\overline{20}|.025} = \$15.907{,}02$$

EMISION SERIADA DE BONOS. Cuando una emisión de bonos va a ser redimida periódicamente en lugar de todos en la misma fecha, se dice que los bonos son de *emisión seriada*. Puede pensarse que los bonos seriados son bonos diferentes con el mismo contrato.

Ejemplo 13.

Una emisión seriada de bonos de \$20.000, con intereses al 6% convertible semestralmente va a ser redimida mediante pagos de \$5000 en 10 años, \$5000 en 12 años y \$10.000 en 15 años. Hallar el precio de compra de la emisión que reditúe 5% convertible semestralmente.

Los bonos seriados son equivalentes a tres bonos ordinarios, uno con valor nominal de \$5000 redimible a la par en 10 años, otro con valor nominal de \$5000 redimible a la par en 12 años, y otro con valor nominal de \$10.000 redimible a la par en 15 años. El precio de compra requerido es la suma de los precios de los tres bonos que reditúen el 5% convertible semestralmente, por lo cual

$$\begin{aligned} P &= 5000(1{,}025)^{-20} + 150\, a_{\overline{20}|.025} \\ &\quad + 5000(1{,}025)^{-24} + 150\, a_{\overline{24}|.025} \\ &\quad + 10.000(1{,}025)^{-30} + 300\, a_{\overline{30}|.025} \\ &= \$21.883{,}38 \end{aligned}$$

Problemas resueltos

1. Un bono de \$1000, 6%, EJ, redimible a la par el 1o. de julio de 1988, es comprado el 1o. de julio de 1961, para ganar el 5% convertible semestralmente. Hallar el precio de compra P.

$$P = 1000(1{,}025)^{-54} + 30\, a_{\overline{54}|.025} = \$1147{,}28$$

2. Un bono de \$1000, 5%, MS, redimible a 102 el 1o. de septiembre de 1990, es comprado el 1o. de marzo de 1962, para ganar el 4% convertible semestralmente. Hallar el precio de compra P.

$$P = 1020(1{,}02)^{-57} + 25\, a_{\overline{57}|.02} = \$1175{,}61$$

3. Sea F el valor nominal y V el valor de redención de un bono. Sea r la tasa de interés por período, del bono, i la tasa del inversionista por período y n el número de períodos de interés. Demostrar que el precio de compra, P es

$$(a)\quad P = \frac{Fr}{i} + \left(V - \frac{Fr}{i}\right)(1+i)^{-n} \qquad \text{y} \qquad (b)\quad P = V + (Fr - Vi)\, a_{\overline{n}|i}$$

(*a*)
$$\begin{aligned} P &= V(1+i)^{-n} + Fr\, a_{\overline{n}|i} \\ &= V(1+i)^{-n} + Fr\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = V(1+i)^{-n} + \frac{Fr}{i} - \frac{Fr}{i}(1+i)^{-n} \\ &= \frac{Fr}{i} + \left(V - \frac{Fr}{i}\right)(1+i)^{-n} \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} P &= V(1+i)^{-n} + Fr\, a_{\overline{n}|i} \\ &= V - V + V(1+i)^{-n} + Fr\, a_{\overline{n}|i} = V - V[1-(1+i)^{-n}] + Fr\, a_{\overline{n}|i} \\ &= V - Vi\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + Fr\, a_{\overline{n}|i} = V + (Fr - Vi)\, a_{\overline{n}|i} \end{aligned}$$

4. Un bono de \$1000, $3\frac{1}{2}$%, FA, es redimible a 105 el 1o. de febrero de 1985. Hallar el precio de compra el 1o. de febrero de 1965, que reditúe 5% convertible semestralmente, utilizando, (*a*) la fórmula (*2*), y (*b*) la fórmula (*3*).

$F = 1000,\ V = 1050,\ r = 0{,}0175,\ i = 0{,}025,\ n = 40.$

(*a*)
$$\begin{aligned} P &= \frac{Fr}{i} + \left(V - \frac{Fr}{i}\right)(1+i)^{-n} \\ &= \frac{1000(0{,}0175)}{0{,}025} + \left[1050 - \frac{1000(0{,}0175)}{0{,}025}\right](1{,}025)^{-40} \\ &= 700 + 350(0{,}37243) = \$830{,}35 \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} P &= V + (Fr - Vi)\, a_{\overline{n}|i} \\ &= 1050 + (17{,}50 - 26{,}25)\, a_{\overline{40}|.025} = 1050 - 8{,}75(25{,}103) = \$830{,}35 \end{aligned}$$

5. Construir una tabla de inversión para un bono de \$1000, 5%, FA, redimible a 103 el 1o. de agosto de 1970, comprado el 1o. de febrero de 1967, para que reditúe 4% convertible semestralmente.

Tenemos que $P = 1030(1{,}02)^{-7} + 25\, a_{\overline{7}|.02} = \$1058{,}48.$

El valor en libros en la fecha de la compra es \$1058,48. Al término del primer período, el interés vencido sobre dicho valor en libros, a la tasa del inversionista es 1058,48(0,02) = \$21,17 mientras que el pago de intereses del bono es por \$25. La diferencia 25 — 21,17 = \$3,83 es para amortizar el capital; en consecuencia, al principio del segundo período, el valor en libros del bono se reduce a 1058,48 — 3,83 = \$1054,65, y así sucesivamente.

Período	Valor en libros al principio del período	Interés vencido sobre el valor en libros	Pago de interés del bono	Cambio en el valor en libros
1	1058,48	21,17	25,00	3,83
2	1054,65	21,09	25,00	3,91
3	1050,74	21,01	25,00	3,99
4	1046,75	20,94	25,00	4,06
5	1042,69	20,85	25,00	4,15
6	1038,54	20,77	25,00	4,23
7	1034,31	20,69	25,00	4,31
8	1030,00			

Como el bono fue comprado a premio, es costumbre hablar de *amortizar el capital* para llevar el valor en libros al valor de redención.

6. Un bono de \$1000, 4%, JD, redimible el 1o. de diciembre de 1995 a la par, es comprado el 31 de marzo de 1961 para que reditúe el 5% convertible semestralmente. Hallar el precio de compra y el valor en libros en dicha fecha.

Al 1o. de diciembre de 1960, la fecha del último pago de interés anterior al día de la compra, el precio de compra que reditúa 5% convertible semestralmente es

$$1000(1{,}025)^{-70} + 20\, a_{\overline{70}|,025} = \$835{,}51$$

Al 31 de marzo de 1961 (120 días después) el precio de compra es

$$835{,}51\left[1 + 0{,}05\left(\frac{120}{360}\right)\right] = \$849{,}44$$

El interés redituable (del 1o. de diciembre de 1960 al 31 de marzo de 1961) es 20(120/180) = \$13,33 y el valor en libros requerido es 849,44 — 13,33 = \$836,11.

Solución alterna.

El valor en libros del bono al 1o. de diciembre de 1960, que reditúa 5% convertible semestralmente es

$$1000(1{,}025)^{-70} + 20\, a_{\overline{70}|,025} = \$835{,}51$$

y en la fecha del siguiente pago de intereses, 1o. de junio de 1961 es

$$1000(1{,}025)^{-69} + 20\, a_{\overline{69}|,025} = \$836{,}40$$

Interpolando entre las dos cantidades, encontramos el valor en libros al 31 de marzo de 1961, o sea

$$835{,}51 + \tfrac{2}{3}(836{,}40 - 835{,}51) = \$836{,}10$$

por lo cual el precio de compra es 836,10 + 13,33 = \$849,43.

7. Un bono de \$1000, 6%, MN, es redimible a la par el 1o. de noviembre de 1965. Es comprado el 30 de junio de 1962 para que reditúe 4% convertible semestralmente. Hallar el precio de compra y el valor en libros en la fecha de compra. Construir una tabla de inversión.

El precio de compra al 1o. de mayo de 1962, que reditúa 4% convertible semestralmente es

$$P = 1000(1{,}02)^{-7} + 30\, a_{\overline{7}|,02} = \$1064{,}72$$

El precio de compra al 30 de junio de 1962 es

$$1064{,}72\left[1 + 0{,}02\left(\frac{60}{180}\right)\right] = \$1071{,}82$$

mientras que el valor en libros es

$$1071{,}82 - 30\left(\frac{60}{180}\right) = 1061{,}82$$

La tabla se construye como en el problema 4 excepto en el primer renglón donde el valor en libros es el del 30 de junio de 1962, el día de la compra y el interés vencido y el pago de intereses del bono son por 2/3 de período de interés.

Período	Valor en libros al principio del período	Interés vencido sobre el valor en libros	Pago de intereses del bono	Cambio en el valor en libros
1	1061,82	14,16	20,00	5,84
2	1055,98	21,12	30,00	8,88
3	1047,10	20,94	30,00	9,06
4	1038,04	20,76	30,00	9,24
5	1028,80	20,58	30,00	9,42
6	1019,38	20,39	30,00	9,61
7	1009,77	20,20	30,00	9,80

8. En el bono del problema 7, cuál es el precio neto y el precio con intereses al 30 de junio de 1962, sobre la base de un rendimiento de 4% convertible semestralmente.

El precio neto es el precio de compra de \$1071,82. El precio con intereses es el valor en libros de \$1061,82. El precio con interés estaría cotizado como $106\frac{1}{8}$ ya que, en la práctica, el precio cotizado siempre se da en octavos.

9. Un bono de \$1000, 3%, EJ, redimible a la par el 1o. de julio de 1977, es comprado en \$952,50 el 1o. de julio de 1963. Hallar la tasa de redituabilidad convertible semestralmente.

Puesto que al 1o. de julio de 1963, el precio de compra que reditúa 3% convertible semestralmente es \$1000, la tasa buscada será mayor. El precio que reditúa $3\frac{1}{2}$% convertible semestralmente es

$$1000(1{,}0175)^{-28} + 15\, a_{\overline{28}|,0175} = \$945{,}03$$

por lo cual la tasa buscada está entre 3 y $3\frac{1}{2}$% convertible semestralmente. Tenemos que

$$0{,}0025\begin{bmatrix} 0{,}015 \\ i \\ 0{,}0175 \end{bmatrix} x \qquad -54{,}97\begin{bmatrix} 1000{,}00 \\ 952{,}50 \\ 945{,}03 \end{bmatrix} -47{,}50$$

de donde

$$x = \frac{47{,}50}{54{,}97}(0{,}0025) = 0{,}00216$$

$$i = 0{,}015 + 0{,}00216 = 0{,}01716$$

y la tasa de redituabilidad es 3,432% convertible semestralmente.

10. Un bono de \$1000, 3%, EJ, es redimible a la par el 1o. de julio de 1990, pero puede ser redimido el 1o. de julio de 1980 o en cualquier fecha posterior de pago de intereses. (*a*) Hallar el precio de compra al 1o. de julio de 1963 que reditúe por lo menos 4% convertible semestralmente. (*b*) Hallar la utilidad del inversionista si el bono es redimido el 1o. de julio de 1985.

Puesto que la tasa de redituabilidad requerida es superior a la tasa del bono, el bono debe ser comprado con descuento. En esta forma, el valor en libros aumenta gradualmente hasta que alcanza el valor nominal en la fecha de redención (véase el ejemplo 5). Por tanto el inversionista debe calcular el precio con la suposición que el bono será redimido en la última fecha posible.

(*a*) El 1o. de julio de 1963, el precio de compra que reditúa 4% convertible semestralmente es

$$1000(1{,}02)^{-54} + 15\, a_{\overline{54}|,02} = \$835{,}80$$

(*b*) Al 1o. de julio de 1985, el valor en libros del bono se habrá incrementado hasta el valor en libros en esa fecha sobre la base de redituabilidad del 4% convertible semestralmente, esto es

$$1000(1{,}02)^{-10} + 15\, a_{\overline{10}|,02} = \$955{,}09$$

Puesto que el inversionista recibirá \$1000 en dicha fecha, su utilidad es 1000 — 955,09 = \$44,91.

Problemas propuestos

11. En cada uno de los casos siguientes, hallar el precio del bono que reditúe la tasa deseada:

	Valor nominal	Redimible a	Pago de intereses	Redituabilidad
(*a*)	\$1000	la par en 25 años	4% semestral	6% semestral
(*b*)	\$ 500	la par en 15 años	4% semestral	5% semestral
(*c*)	\$1000	105 en 10 años	5% trimestral	3% trimestral
(*d*)	\$ 100	110 en 20 años	4% semestral	3% semestral
(*e*)	\$1000	la par en 5 años	5% anual	4% anual
(*f*)	\$ 500	la par en 3 años	6% semestral	5% semestral
(*g*)	\$1000	102 en $2\frac{1}{2}$ años	3% semestral	6% semestral
(*h*)	\$ 500	105 en $2\frac{1}{2}$ años	4% semestral	5% semestral

Resp. (*a*) \$742,71; (*b*) \$447,67; (*c*) \$1209,32; (*d*) \$120,47;
(*e*) \$1044,52; (*f*) \$513,77; (*g*) \$948,56; (*h*) \$510,48

12. Construir una tabla de inversión para cada uno de los bonos del problema 11(*e*)-(*h*).

13. En cada uno de los casos siguientes, hallar el precio de compra del bono que reditúe la tasa dada:

	Valor nominal	Redimible a	Pago de intereses	Fecha de compra	Que reditúe
(*a*)	$1000	la par el 1o. dic. 1986	4% JD	30 agosto 1960	5% semestral
(*b*)	$1000	la par el 1o. nov. 1988	5% MN	22 sept. 1962	6% semestral
(*c*)	$ 100	105 el 1o. julio 1975	5% EJ	18 abril 1960	$3\frac{1}{2}$% semestral
(*d*)	$ 500	102 el 1o. oct. 1995	5% AO	30 dic. 1963	4% semestral

Resp. (*a*) $864,71; (*b*) $888,97; (*c*) $122,01; (*d*) $598,55

14. Para cada uno de los bonos del problema 13, hallar el precio "con intereses" el día de la compra.
Resp. (*a*) $854,71; (*b*) $868,97; (*c*) $120,51; (*d*) $592,30

15. En cada uno de los casos siguientes, hallar la tasa de redituabilidad convertible semestralmente, mediante interpolación:

	Valor nominal	Redimible a	Pago de intereses	Precio cotizado	Fecha
(*a*)	$1000	la par el 1o. enero 1988	$3\frac{1}{2}$% EJ	93	1o. julio 1960
(*b*)	$1000	la par el 1o. marzo 1987	3% MS	90	1o. marzo 1962
(*c*)	$1000	105 el 1o. agosto 1990	5% FA	110	1o. feb. 1962
(*d*)	$1000	103 el 1o. dic. 1989	6% JD	112	1o. julio 1963

Resp. (*a*) 3,922%; (*b*) 3,615%; (*c*) 4,493%; (*d*) 5,230%

16. Un bono de $1000, 4%, EJ, es redimible a la par el 1o. de enero de 1975, pero puede ser redimido el 1o. de enero de 1968 o en cualquier fecha posterior de pago de intereses. (*a*) Hallar el precio de compra el 1o. de enero de 1961, que reditúe por lo menos 5% convertible semestralmente. (*b*) Si el bono es redimido el 1o. de julio de 1970, ¿cuál es la utilidad del inversionista y qué tasa convertible semestralmente redituará el bono?
Resp. (*a*) $900,18; (*b*) $39,85; 5,365%

17. Un bono de $1000, 5%, EJ, será redimido a la par el 1o. de enero de 1975, pero puede ser redimido el 1o. de enero de 1968 o en cualquier fecha posterior de pago de intereses. (*a*) Hallar el precio de compra al 1o. de enero de 1961, que reditúe por lo menos 4% convertible semestralmente. (*b*) Si el bono es redimido el 1o. de julio de 1970, ¿cuál es la utilidad del inversionista y qué tasa convertible semestralmente redituará el bono?
Resp. (*a*) $1060,54; (*b*) $26,02; 4,228%

18. Hallar el precio de compra de un bono de anualidad de $5000, a 15 años con intereses al 6% anual, comprado al término del 8o. año, para que reditúe $4\frac{1}{2}$%.
Resp. $3033,68

19. Hallar el precio de compra de un bono de anualidad de $10.000, a 10 años con intereses al 4% convertible semestralmente, comprado al término de tres años para que reditúe 5% convertible semestralmente. *Resp.* $7149,81

20. Una compañía emite $300.000 en bonos al 5% y acuerda redimirlos mediante pagos de $150.000 al término de 5 y 10 años. Hallar el precio pagado por un banco el día de la emisión, que le redituará 4%.
Resp. $318.844,07

21. Sustituir $V(1+i)^{-n} = K$ y $Fr = gV$ en (*I*) para obtener la fórmula de Makeham

$$P = K + \frac{g}{i}(V-K)$$

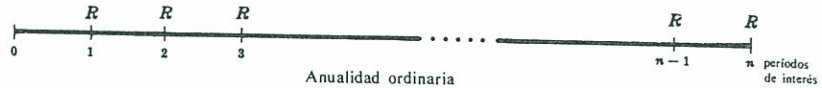
Utilizar la fórmula para resolver el problema 11.

22. Una emisión de $50.000 en bonos seriados, con intereses al 4% convertible semestralmente, con vencimientos de $5000 cada 6 meses por los próximos 5 años, es comprada para que reditúe 3% convertible semestralmente. Hallar el precio de compra utilizando la fórmula de Makeham. *Sugerencia.* $K = 5000\,a_{\overline{10}|.015}$ y $g = 0{,}02$. *Resp.* $51.296,36

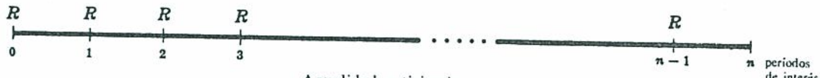
Capítulo 13

Anualidades anticipadas, anualidades diferidas, perpetuidades

ANUALIDADES ANTICIPADAS. Una *anualidad anticipada* es una anualidad cuyo pago periódico vence al principio del intervalo de pago. El pago de la renta de una casa es un ejemplo de anualidad anticipada. El plazo de la anualidad anticipada se define como el intervalo que va desde la fecha del primer pago hasta el término del período de pago anterior a la fecha del último pago. En los diagramas se muestra el caso simple (intervalo de pago y período de interés coinciden) de una



Anualidad ordinaria



Anualidad anticipada

anualidad ordinaria y de una anualidad anticipada, cada una de n períodos. Nótese que la anualidad ordinaria no tiene pago al principio del plazo; la anualidad anticipada no tiene pago al final del plazo. La anualidad ordinaria tiene pago al final del plazo; la anualidad anticipada tiene pago al principio del plazo. No son necesarias nuevas fórmulas para manejar anualidades anticipadas. Solamente es necesario tener en mente las observaciones hechas y las definiciones de $a_{\overline{n}|i}$ y $s_{\overline{n}|i}$.

Ejemplo 1.

La renta mensual de un edificio es $400 pagaderos por adelantado, esto es, al principio de cada mes. ¿Cuál es la renta anual equivalente X pagada por adelantado, al 6% convertible mensualmente?

Recordemos que $a_{\overline{n}|i}$ no incluye un pago al principio del plazo. Tomando el principio del año como fecha focal, el primer pago es efectivo mientras que los 11 restantes forman una anualidad ordinaria, por tanto

$$X = 400 + 400\,a_{\overline{11}|.005} = 400 + 400(10{,}67703) = \$4670{,}81$$

Ejemplo 2.

Los días 15 de cada mes, M invierte $100 en un fondo que paga el 3% convertible mensualmente. ¿Cuánto habrá en el fondo justamente antes del 10o. depósito?

Designemos con X la cantidad requerida. Puesto que $s_{\overline{n}|i}$ incluye un pago efectivo, $S = 100\,s_{\overline{9}|.0025}$ es el monto del fondo

justamente después del 9o. depósito. Por tanto

$$X = S(1{,}0025) = 100\, s_{\overline{9}|.0025}(1{,}0025)$$
$$= 100(9{,}09053)(1{,}0025) = \$911{,}32$$

Solución alterna

Del problema 8, capítulo 9, $s_{\overline{n}|i}(1+i) = s_{\overline{n+1}|i} - 1$. Por tanto

$$X = 100\, s_{\overline{9}|.0025}(1{,}0025) = 100(s_{\overline{10}|.0025} - 1)$$
$$= 100(10{,}11325 - 1) = \$911{,}32$$

Generalmente debe preferirse esta alternativa.

Véanse los problemas 1-5.

ANUALIDADES DIFERIDAS. Una *anualidad diferida* es aquella cuyo primer pago se hace algún tiempo después del término del primer período de interés.

Ejemplo 3.

Un puente recién construido no necesitará reparación hasta el término de 5 años, cuando se requerirán \$300 para reparaciones. Se estima que de ahí en adelante se necesitarán \$300 al final de cada año en los próximos 20 años. Hallar el valor presente X del mantenimiento del puente, sobre la base de 3%.

La anualidad está diferida por 4 períodos y después continúa por 21 períodos. El valor de la anualidad un período antes del primer pago (esto es, al término de 4 años) es $A = 300\, a_{\overline{21}|.03}$; por lo cual

$$X = 300\, a_{\overline{21}|.03}(1{,}03)^{-4} = 300(15{,}41502)(0{,}88849) = \$4108{,}83$$

Solución alterna

Recordemos el artificio del problema 5, capítulo 9. Supondremos una línea de tiempo de 25 pagos agregando pagos al final de cada uno de los 4 primeros períodos; se encuentra el valor de esta anualidad ordinaria y se le resta el valor presente de los 4 pagos agregados (otra anualidad ordinaria). Por tanto

$$X = 300\, a_{\overline{25}|.03} - 300\, a_{\overline{4}|.03} = 300(17{,}41315 - 3{,}71710) = \$4108{,}82$$

Véanse los problemas 6-7.

PERPETUIDAD. Una *perpetuidad* es una anualidad cuyo pago se inicia en una fecha fija y continúa para siempre. Con la suposición que una compañía nunca quebrará, los dividendos sobre sus acciones preferentes pueden considerarse como una perpetuidad. Es claro que no se puede hablar del monto de una perpetuidad, sin embargo, tiene un valor presente definido.

Considérese una perpetuidad de R pagaderos al final de cada período de interés, sobre la base de un interés i por período. El valor presente de la perpetuidad es simplemente la cantidad A que en un período de interés produce R de intereses, esto es, $Ai = R$ o sea que

$$A = \frac{R}{i} \qquad (I)$$

Ejemplo 4.

La compañía XYZ espera pagar \$2,50 cada seis meses, indefinidamente, como dividendo sobre sus acciones preferentes. Suponiendo un rendimiento de 6% convertible semestralmente, ¿cuánto debería estar dispuesto a pagar B por cada acción?

$A = 2{,}50$, $i = 0{,}03$; por tanto $A = \frac{R}{i} = \frac{2{,}50}{0{,}03} = \$83{,}33$.

Hay dos variaciones de la situación básica obtenida, cuando el intervalo de pago y el período de interés no coinciden. Tenemos el caso de $k > 1$ período de interés por intervalo de pago o de $k > 1$ intervalo de pago por período de interés. En cualquier caso, primero hallamos la tasa equivalente de interés por intervalo de pago (véase el capítulo 7) y después utilizamos la relación dada en (I).

Ejemplo 5.

¿Cuánto debería estar dispuesto a pagar C por cada acción del ejemplo 4 si espera una redituabilidad de 5% convertible trimestralmente?

En este caso el intervalo de pago es 6 meses y el período de interés es 3 meses. La tasa nominal $2i$ convertible semestralmente equivalente al 5% convertible trimestralmente se encuentra resolviendo

$$(1+i)^2 = \left(1 + \frac{0{,}05}{4}\right)^4 = (1{,}0125)^4$$

para

$$i = (1{,}0125)^2 - 1 = 0{,}02515625$$

Ahora podemos enunciar nuestro problema como sigue: ¿Cuánto debería estar dispuesto a pagar C por cada acción del ejemplo 4 si desea una redituabilidad del 5,03125% convertible semestralmente? La nueva línea de tiempo es

con $R = 2{,}50$ e $i = 0{,}02515625$. Por tanto $A = \frac{2{,}50}{0{,}025156} = \$99{,}38$.

Ejemplo 6.

¿Cuánto debería estar dispuesto a pagar D por cada acción del ejemplo 4 si espera una redituabilidad de 5% efectivo?

En este caso el intervalo de pago es 6 meses y el período de interés es 1 año. La tasa nominal $2i$ convertible semestralmente equivalente al 5% efectivo se encuentra resolviendo

$$(1+i)^2 = 1{,}05$$

para $i = (1{,}05)^{1/2} - 1 = 0{,}02469508$, usando la tabla VI.

Ahora podemos enunciar nuestro problema como sigue: ¿Cuánto debería estar dispuesto a pagar D por cada acción del ejemplo 4 si desea una redituabilidad de 4,939016% convertible semestralmente? La nueva línea de tiempo es

con $R = 2{,}50$ e $i = 0{,}024695$. Por tanto $A = \frac{2{,}50}{0{,}024695} = \$101{,}24$.

Véanse los problemas 8-9.

COSTO CAPITALIZADO. El *costo capitalizado C* de un activo es el costo inicial F más el valor presente de un número ilimitado de costos de remplazo de cada R, esto es, de una perpetuidad de R por intervalo de remplazo.

Ejemplo 7.

Una cierta máquina costó \$2500 y tiene duración de 10 años, al término de los cuales su valor de salvamento es \$500. Si los remplazos también cuestan \$2500, hallar el costo capitalizado de la máquina sobre la base de 4%.

El remplazo le cuesta a la compañía 2500 — 500 = \$2000. La tasa de interés i por intervalo de remplazo, esto es, convertible cada 10 años equivalente al 4% convertible anualmente, se determina resolviendo

$$(1+i)^1 = (1{,}04)^{10}$$

para $i = (1{,}04)^{10} - 1 = 0{,}48024428$. El valor presente de la perpetuidad es $\frac{2000}{0{,}480244} = \$4164{,}55$; por lo cual el costo capitalizado es $2500 + 4164{,}55 = \$6664{,}55$.

METODOS ALTERNATIVOS. La discusión anterior sobre perpetuidades estuvo basada en el uso de una fórmula, $R = A/i$. Esta simplicidad en ocasiones implica una larga división. Si se utiliza una calculadora o logaritmos, esto no presenta dificultad alguna, sin embargo cuando no se utiliza ni calculadora ni logaritmos, sería conveniente eliminar en cuanto sea posible la división. La consecuencia de esto es una fórmula más complicada.

(i) Para una perpetuidad de R pagadera al final de cada período de interés k, con la base de una redituabilidad de i por período de interés y en consecuencia, $(1+i)^k - 1$ por intervalo de pago, tenemos

$$A = \frac{R}{(1+i)^k - 1} = \frac{R}{i}\cdot\frac{i}{(1+i)^k - 1} = \frac{R}{i}\cdot\frac{1}{s_{\overline{k}|i}}$$

En el ejemplo 5, $k = 2$ y $A = \dfrac{2{,}50}{0{,}0125}\cdot\dfrac{1}{s_{\overline{2}|.0125}} = 200(0{,}49689) = \$99{,}38.$

(ii) Para una perpetuidad de R pagadera p veces por período de interés, con la base de una redituabilidad de i por período de interés y en consecuencia, $(1+i)^{1/p} - 1$ por intervalo de pago, tenemos

$$A = \frac{R}{(1+i)^{1/p} - 1} = \frac{R}{i}\cdot\frac{i}{[(1+i)^{1/p} - 1]} = \frac{R}{i}\cdot\frac{1}{s_{\overline{1/p}|i}}$$

donde para ciertos casos $\dfrac{1}{s_{\overline{1/p}|i}}$ está dado en la tabla X.

En el ejemplo 6, $k = 2$ y $A = \dfrac{2{,}50}{0{,}05}\cdot\dfrac{1}{s_{\overline{1/2}|.05}} = 50(2{,}0247) = \$101{,}24.$

Problemas resueltos

1. En lugar de estar pagando \$125 de renta al principio de cada mes, por los próximos 8 años, M decide comprar una casa. ¿Cuál es el valor en efectivo de los 8 años de renta al 5% convertible mensualmente?

En este caso X (el equivalente en efectivo) es el valor presente de una anualidad anticipada de 96 pagos, esto es, un pago efectivo más el valor presente de una anualidad ordinaria de 95 pagos. Por tanto

$$X = 125 + 125\,a_{\overline{95}|.05/12} = 125 + 125(78{,}31856) = \$9914{,}82$$

2. Una corporación reserva \$10.000 al principio de cada año para crear un fondo en caso de futura expansión. Si el fondo gana el 3%, ¿cuál será su monto al término del 10o. año?

En este caso X es el monto de una anualidad anticipada de 10 pagos, esto es, el monto de una anualidad ordinaria justamente antes del 11o. pago. Por tanto

$$X = 10.000[s_{\overline{11}|.03} - 1] = 10.000(11{,}8077957) = \$118.077{,}96$$

3. M desea que el beneficio de un seguro de \$150.000 sea invertido al 3% y que de dicha cantidad su viuda reciba \$7500 anuales, haciéndose el primer pago inmediatamente, y durante todo el tiempo que viva. En la fecha de pago siguiente a la muerte de su esposa, el sobrante del fondo será dado al colegio Hazel. Si su esposa muere 7 años 9 meses más tarde, ¿cuánto recibirá el colegio?

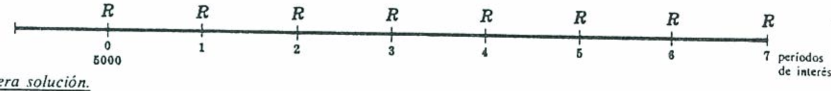
Designemos con X la suma requerida. Tomando el final del 8o. año como fecha focal, el conjunto de pagos de \$7500 forma una anualidad anticipada de 8 pagos cuyo monto es $7500[s_{\overline{9}|.03} - 1]$. Entonces

$$7500[s_{\overline{9}|.03} - 1] + X = 150.000(1{,}03)^8$$

y

$$X = 150.000(1{,}03)^8 - 7500[s_{\overline{9}|.03} - 1]$$
$$= 150.000(1{,}26677008) - 7500(9{,}159106) = \$121.322{,}21$$

4. Una deuda de \$5000 con intereses al 4% convertible trimestralmente va a ser liquidada mediante 8 pagos trimestrales iguales, el primero con vencimiento el día de hoy. Hallar el pago trimestral R.



Primera solución.

El valor presente de una anualidad anticipada de 8 pagos es igual a un pago efectivo más el valor presente de una anualidad ordinaria de 7 pagos. Por tanto

$$R(1 + a_{\overline{7}|.01}) = 5000$$

y

$$R = \frac{5000}{1 + a_{\overline{7}|.01}} = \frac{5000}{7{,}7281945} = \$646{,}98$$

Segunda solución.

Utilizando como fecha focal un período de interés anterior al día de hoy, tenemos

$$R\,a_{\overline{8}|.01} = 5000(1{,}01)^{-1}$$

Por lo cual

$$R = 5000(1{,}01)^{-1}\frac{1}{a_{\overline{8}|.01}} = 5000(0{,}990099)(0{,}130690) = \$646{,}98$$

5. Dentro de 10 años la compañía XYZ necesitará \$12.000 para remplazar maquinaria desgastada. ¿Cuál será el importe del depósito semestral R que tendrá que hacer desde ahora en un fondo que paga el 3% convertible semestralmente, durante 10 años, para acumular dicha suma?

Primera solución.

Suponiendo un pago extra al término de los 10 años, tenemos

$$R(s_{\overline{21}|.015} - 1) = 12.000$$

Por lo cual

$$R = \frac{12.000}{s_{\overline{21}|.015} - 1} = \frac{12.000}{23,470522} = \$511,28$$

Segunda solución.

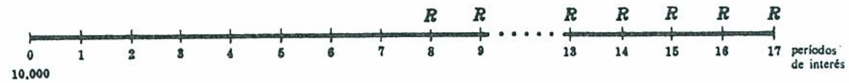
Utilizando como fecha focal el final del 19o. período de interés, tenemos

$$R\, s_{\overline{20}|.015} = 12.000(1,015)^{-1}$$

Por lo cual

$$R = 12.000(1,015)^{-1}\frac{1}{s_{\overline{20}|.015}} = 12.000(0,9852217)(0,0432457) = \$511,28$$

6. Una huerta avaluada en \$15.000 es vendida con \$5000 de cuota inicial. El comprador acuerda pagar el saldo con intereses al 5% convertible semestralmente, mediante 10 pagos semestrales iguales de R cada uno, el primero con vencimiento dentro de 4 años. Hallar R.



Los pagos constituyen una anualidad diferida a 7 períodos de interés.

Primera solución.

Si se supone que los pagos se harán al finalizar los primeros 7 períodos, vemos que

$$R(a_{\overline{17}|.025} - a_{\overline{7}|.025}) = 10.000$$

Por lo cual

$$R = \frac{10.000}{a_{\overline{17}|.025} - a_{\overline{7}|.025}} = \frac{10.000}{7,3628071} = \$1358,18$$

Segunda solución.

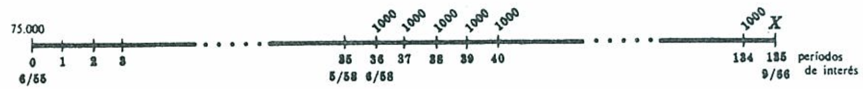
Utilizando como fecha focal el final del 7o. período de interés, tenemos

$$R\, a_{\overline{10}|.025} = 10.000(1,025)^{7}$$

Por tanto

$$R = 10.000(1,025)^{7}\frac{1}{a_{\overline{10}|.025}} = 10.000(1,1886858)(0,1142588) = \$1358,18$$

7. El 1o. de junio de 1955 M obtuvo un préstamo de \$75.000 con intereses al 4% convertible mensualmente. Piensa liquidar la deuda mediante pagos mensuales de \$1000, el 1o. de junio de 1958. Hallar el número de pagos completos y el pago adicional que hará un mes después, necesarios para cancelar la deuda.



Tomando el 1o. de mayo de 1958 como fecha focal, tenemos

$$1000\, a_{\overline{n}|.01/3} = 75.000(1 + 0,01/3)^{35}$$

y

$$a_{\overline{n}|.01/3} = 75(1 + 0,01/3)^{35} = 75(1,1235) = 84,2625$$

El número de pagos completos es 99. Sea X el pago adicional (irregular). Para hallar X

(i) Tómese el 1o. de septiembre de 1966, que es la fecha del pago irregular, como fecha focal. De donde

$$1000(s_{\overline{100}|.01/3} - 1) + X = 75.000(1 + 0,01/3)^{135}$$

y

$$X = 75.000(1,5671390) - 1000(117,451705) = \$83,72$$

(ii) Tómese el 1o. de mayo de 1958 como fecha focal; tenemos que

$$1000\, a_{\overline{99}|.01/3} + X(1 + 0,01/3)^{-100} = 75.000(1 + 0,01/3)^{35}$$

$$X = \{75.000(1 + 0,01/3)^{35} - 1000\, a_{\overline{99}|.01/3}\}(1 + 0,01/3)^{100}$$

$$= \{75.000(1,1235268) - 1000(84,20449)\}(1,3948) = \$83,72$$

8. Hallar el valor presente de una perpetuidad de \$780 pagaderos al final de cada año, suponiendo un interés de, (*a*) 6% efectivo, (*b*) 6% convertible semestralmente, (*c*) 6% convertible trimestralmente.

(*a*) $A = \dfrac{780}{0.06} = \$13.000$

(*b*) $A = \dfrac{780}{(1,03)^2 - 1} = \dfrac{780}{0,0609} = \$12.807,88$

(*c*) $A = \dfrac{780}{(1,015)^4 - 1} = \dfrac{780}{0,06136335} = \$12.711,13$

Soluciones alternas.

(*b*) $R = 780,\ i = 0,03,\ k = 2$; de donde

$$A = \frac{R}{i}\cdot\frac{1}{s_{\overline{k}|i}} = \frac{780}{0,03}\cdot\frac{1}{s_{\overline{2}|.03}} = 26.000(0,4926108) = \$12.807,88$$

(*c*) $R = 780,\ i = 0,015,\ k = 4$; de donde

$$A = \frac{780}{0,015}\cdot\frac{1}{s_{\overline{4}|.015}} = 52.000(0,2444448) = \$12.711,13$$

9. Hallar el pago semestral de una perpetuidad cuyo valor presente es \$36.000 suponiendo un interés de 4% convertible semestralmente.

$A = 36.000,\ i = 0,02$ de donde $R = Ai = 36.000(0,02) = \$720.$

10. Unas tribunas de madera con vida probable de 15 años, pueden ser construidas con \$100.000. Suponiendo un interés de 5% hallar

(*a*) El costo capitalizado de las tribunas.

(*b*) La cantidad que sería razonable pagar por unas tribunas de acero con una vida probable de 50 años.

(*a*) $R = 100.000,\ i = (1.05)^{15} - 1 = 1,07892818$; de donde

$$A = \frac{100.000}{1,07892818} = \$92.684,58 \quad \text{y} \quad C = 100.000 + 92.684,58 = \$192.684,58$$

(*b*) Designemos con R la suma que se pagaría por las tribunas de acero. Como la tasa de interés convertible cada 50 años equivalente al 5% convertible anualmente es $i = (1.05)^{50} - 1 = 10,4674$,

$$R + \frac{R}{10,4674} = 192.684,58 \quad \text{o sea} \quad R = \frac{10,4674(192.684,58)}{11,4674} = \$175.881,75$$

Solución alterna.

(*a*) $F = R = 100.000$, $i = 0{,}05$, $k = 15$; de donde

$$C = F + \frac{R}{i}\cdot\frac{1}{s_{\overline{k}|i}} = 100.000 + \frac{100.000}{0{,}05}\cdot\frac{1}{s_{\overline{15}|.05}}$$

$$= \frac{100.000}{0{,}05}\left(0{,}05 + \frac{1}{s_{\overline{15}|.05}}\right) = 2.000.000\,\frac{1}{a_{\overline{15}|.05}}$$

$$= 2.000.000(0.09634229) = \$192.684{,}58$$

(*b*) $C = 192.684{,}58$, $i = 0{,}05$, $k = 50$, $F = R$; de donde

$$C = F + \frac{R}{i}\cdot\frac{1}{s_{\overline{k}|i}} = \frac{R}{i}\left[i + \frac{1}{s_{\overline{k}|i}}\right] = \frac{R}{i}\cdot\frac{1}{a_{\overline{k}|i}}$$

y $$R = Ci\,a_{\overline{k}|i} = 192.684{,}58(0{,}05)\,a_{\overline{50}|.05} = 9634{,}23(18{,}255925) = \$175.881{,}78$$

Problemas propuestos

11. Un televisor es comprado con \$50 de cuota inicial y \$50 mensuales durante 14 meses. Si se cargan intereses de 21% convertible mensualmente, ¿cuál es el valor de contado del televisor? *Resp.* \$666,10

12. B alquila un edificio en \$10.000 cada 3 meses pagados por adelantado. Invierte en forma inmediata \$7500 de cada pago en un fondo que paga el 5% convertible trimestralmente. ¿Cuál será el importe del fondo al término de 6 años? *Resp.* \$211.015,76

13. La prima anual por adelantado de una póliza de seguro temporal a 10 años es \$178,40. ¿Cuál es el equivalente de contado al $3\frac{1}{2}$%? *Resp.* \$1535,61

14. M acuerda pagar \$250 al principio de cada año durante 15 años. Al $4\frac{1}{2}$% hallar el valor de los pagos restantes, (*a*) justamente después que haga el tercer pago, (*b*) justamente antes de hacer el sexto pago. (*c*) Si después de hacer el pago inicial, M deja de hacer los 4 pagos siguientes, ¿cuánto tendrá que pagar al vencimiento del siguiente pago para ponerse al corriente? *Resp.* (*a*) 2279,64; (*b*) \$2067,20; (*c*) \$1367,68

15. El valor de contado de un coche usado es \$1750. B desea pagarlo en 15 abonos mensuales, venciendo el primero el día de la compra. Si se carga el 18% de interés convertible mensualmente, hallar el importe del pago mensual.

Sugerencia. $x(1 + a_{\overline{14}|.015}) = 1750$ o sea $x = 1750(1.015)^{14}\dfrac{1}{s_{\overline{15}|.015}}$

16. La renta por un edificio es \$1500 anuales por adelantado. ¿Cuál es la renta mensual por adelantado equivalente al 6% convertible mensualmente? *Resp.* \$128,46

17. Un granjero compró un tractor el 1o. de marzo, comprendiendo que haría pagos mensuales de \$200 durante 24 meses, el primero con vencimiento el 1o. de octubre. Si el interés es al 12% convertible mensualmente, hallar el valor de contado equivalente. *Resp.* \$4002,45

18. El 1o. de junio de 1958 se compra un negocio con \$10.000 de cuota inicial y 10 pagos trimestrales de \$2500 cada uno, el primero con vencimiento el 1o. de junio de 1961. ¿Cuál es el valor de contado del negocio suponiendo intereses al 6% convertible trimestralmente? *Resp.* \$29.572,55

19. En esta fecha, B adquiere un préstamo de \$25.000 para adquirir un plantío de frutas cítricas. Piensa liquidar el préstamo con intereses de $5\frac{1}{2}$% en 10 pagos anuales iguales, haciendo el primero en 8 años. Hallar el pago anual X. *Resp.* \$4824,73

20. Al nacimiento de su hijo, M desea depositar en una fiduciaria una cantidad tal que le proporcione a su hijo pagos de \$1250 cada 6 meses durante 4 años, venciendo el primero cuando cumpla 18 años. Si la fiduciaria paga el 3% convertible semestralmente, ¿cuánto tendrá que depositar M? *Resp.* \$5557,05

21. En esta fecha, M contrae una deuda con intereses al 5% convertible trimestralmente, la cual será pagada mediante desembolsos de \$250 al final de cada 3 meses por los proximos 5 años, seguidos de pagos de \$400 trimestrales por los siguientes 4 años. Hallar el importe de la deuda. *Resp.* \$8899,01

22. Suponiendo que una granja produzca \$5000 anuales indefinidamente, ¿cuál es su valor real sobre la base de 5%? *Resp.* \$100.000

23. ¿Qué cantidad es necesaria para patrocinar una serie de conferencias que cuestan \$2500 al principio de cada año, indefinidamente, suponiendo intereses al 5% convertible trimestralmente? *Resp.* \$51.572,20

24. Un colegio calcula que el nuevo edificio de la sociedad de alumnos requerirá \$800 de mantenimiento al final de cada año por los próximos 10 años y posteriormente \$1500 al final de cada año, indefinidamente. ¿Qué donativo se hace necesario para asegurar el mantenimiento del edificio, suponiendo intereses de 4%?

Resp. $800\,a_{\overline{10}|.04} + \dfrac{1500}{0{,}04}(1{,}04)^{-10}$

25. (i) Una alfombra que cuesta \$50 tiene que ser remplazada cada 2 años al mismo costo; (ii) otra que cuesta \$300 tiene que ser remplazada cada 10 años al mismo precio. Con la base de 5% del interés, ¿cuál es la más económica? *Resp.* (i)

26. Demostrar que $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ nos da la diferencia entre el valor presente de una perpetuidad ordinaria de 1 por período y el valor presente de una perpetuidad ordinaria de 1 por período, diferida *n* períodos.

27. La compañía XYZ utiliza baterías que cuestan \$30 con una vida útil de 2 años. Se ofrece otro modelo que cuesta \$40 con una vida probable de 3 años. ¿Cuál de los dos modelos es mejor inversión sobre la base de 5%?

28. ¿Cuál es el máximo precio que la compañía XYZ puede pagar por el segundo modelo de la batería del problema 27, de tal forma que el costo capitalizado no exceda al del modelo que tiene actualmente en uso? *Resp.* \$43,94

29. Las vigas utilizadas en cierta construcción cuestan \$2000 y duran 12 años. Aplicándoles un tratamiento preservativo pueden durar 20 años. ¿Cuánto podría pagarse por el tratamiento suponiendo intereses de 4%?

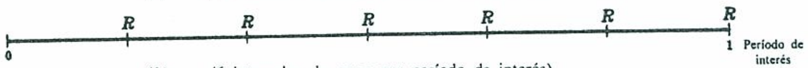
Resp. $2000\left[\dfrac{1}{a_{\overline{12}|.04}}\cdot a_{\overline{20}|.04} - 1\right]$

Capítulo 14

Anualidades ciertas. Caso general

UNA ANUALIDAD GENERAL es aquella cuyo período de interés e intervalo de pago no coinciden. Las anualidades generales que más frecuentemente se presentan tienen ya sea, (*a*) un número entero de períodos de interés por intervalo de pago, o (*b*) un número entero de intervalos de pago por período de interés. En los diagramas de estos casos, R es el pago periódico.

(*a*) (4 períodos de interés por intervalo de pago)

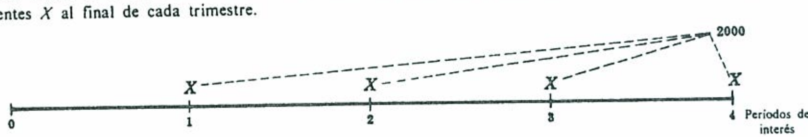


(*b*) (6 intervalos de pago por período de interés)

Una anualidad general puede ser trasformada en una anualidad simple equivalente, de dos maneras: (i) cambiando la tasa de interés dada en una equivalente (véase el capítulo 7) en la cual el nuevo período de interés coincide con el intervalo de pago, o (ii) remplazando los pagos dados R por pagos equivalentes X hechos al final de los períodos de interés. Utilizaremos (ii) ya que es generalmente aceptado que los períodos de interés dados son la mejor unidad de tiempo. Los ejemplos 1 y 2, son básicos para nuestro tratamiento a la anualidad general.

Ejemplo 1.

Si el interés es de 6% convertible trimestralmente, remplazar un pago de \$2000 al final de cada año por pagos equivalentes X al final de cada trimestre.



Tenemos

$$X s_{\overline{4}|.015} = 2000 \quad \text{o sea} \quad X = 2000\frac{1}{s_{\overline{4}|.015}} = 2000(0{,}244445) = \$488{,}89$$

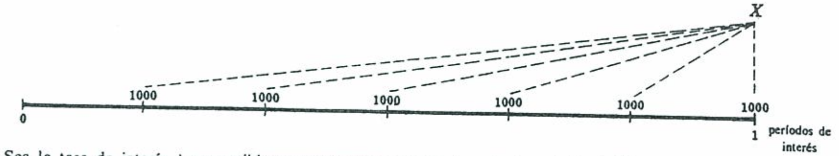
Del ejemplo 1 se deduce rápidamente que si R es el pago periódico, i la tasa por período de interés y hay k períodos de interés por intervalo de pago, R puede ser distribuido en k pagos de X cada uno, con vencimiento al final de cada período de interés, donde

$$X = R\frac{1}{s_{\overline{k}|i}} \qquad (1)$$

En consecuencia, podemos hablar de $\frac{1}{s_{\overline{k}|i}}$ como *factor de distribución.*

Ejemplo 2.

Con intereses al 6% convertible semestralmente, sustituir pagos de \$1000 al final de cada mes por pagos equivalentes X al final de cada 6 meses.



Sea la tasa de interés j convertible mensualmente equivalente a la tasa dada de 6% convertible semestralmente. Tenemos

$$\left(1+\frac{j}{12}\right)^6 = 1{,}03, \qquad 1+\frac{j}{12} = (1{,}03)^{1/6}, \qquad \text{y} \qquad \frac{j}{12} = (1{,}03)^{1/6}-1$$

Ahora

$$\begin{aligned} X &= 1000\, s_{\overline{6}|j/12} = 1000\frac{(1+j/12)^6-1}{j/12} \\ &= 1000\frac{1{,}03-1}{(1{,}03)^{1/6}-1} = 1000\frac{0{,}03}{(1{,}03)^{1/6}-1} = 1000\frac{1}{s_{\overline{1/6}|.03}} \\ &= 1000(6{,}074569) = \$6074{,}57 \qquad \text{(Tabla X)} \end{aligned}$$

Del ejemplo 2 vemos que si R es el pago periódico, i es la tasa por período de interés y si hay p intervalos de pago por período de interés, los p pagos de R cada uno pueden ser combinados en un pago único X al final del período de interés, donde

$$X = R\frac{i}{(1+i)^{1/p}-1} = R\frac{1}{s_{\overline{1/p}|i}} \qquad (2)$$

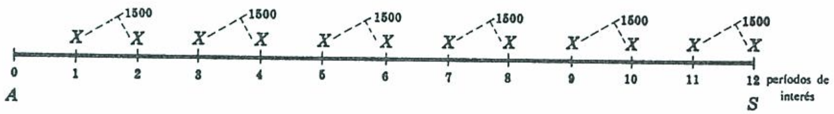
En consecuencia, podemos decir que $\frac{1}{s_{\overline{1/p}|i}} = \frac{i}{(1+i)^{1/p}-1}$ es el *factor de agrupamiento.*

Véanse los problemas 1-3.

MONTO Y VALOR PRESENTE. Después de distribuir o agrupar los pagos periódicos dados para tener un pago al final de cada período de interés, el monto y el valor presente de una anualidad general se encuentran utilizando las fórmulas básicas del capítulo 9.

Ejemplo 3.

Hallar el monto y el valor presente de una anualidad de \$1500 anuales por 6 años con intereses al 6% convertible semestralmente.



El intervalo de pago es 1 año y el período de interés es 6 meses; hay 2 períodos de interés por intervalo de pago. Primero distribuimos cada pago anual de \$1500 en dos pagos equivalentes de X cada uno, donde, de (1),

$$X = 1500\frac{1}{s_{\overline{2}|.03}}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} S &= X s_{\overline{12}|.03} = 1500\, s_{\overline{12}|.03}\frac{1}{s_{\overline{2}|.03}} \\ &= 1500(14{,}192030)(0{,}492611) = \$10{,}486\ 72 \end{aligned}$$

y

$$A \;=\; X\,a_{\overline{12}|.03} \;=\; 1500\,a_{\overline{12}|.03}\,\frac{1}{s_{\overline{2}|.03}}$$

$$=\; 1500(9{,}954004)(0{,}492611) \;=\; \$7355{,}18$$

Ejemplo 4.

Hallar el monto y el valor presente de una anualidad ordinaria de \$1000 trimestrales, por 5 años, al 6% convertible semestralmente.

El intervalo de pago es 3 meses y el período de interés es 6 meses; hay 2 intervalos de pago por período de interés. Primero agrupamos los dos pagos de cada período de interés en un pago X al final del período de interés, donde, de (*2*)

$$X \;=\; 1000\,\frac{1}{s_{\overline{1/2}|.03}}$$

Por lo cual

$$S \;=\; X\,s_{\overline{10}|.03} \;=\; 1000\,s_{\overline{10}|.03}\,\frac{1}{s_{\overline{1/2}|.03}}$$

$$=\; 1000(11{,}463879)(2{,}014889) \;=\; \$23.098{,}44$$

y

$$A \;=\; X\,a_{\overline{10}|.03} \;=\; 1000\,a_{\overline{10}|.03}\,\frac{1}{s_{\overline{1/2}|.03}}$$

$$=\; 1000(8{,}530203)(2{,}014889) \;=\; \$17.187{,}41$$

Véanse los problemas 4-5.

Los ejemplos 3 y 4 dados anteriormente no presentan dificultad ya que los valores de los símbolos usados se encuentran directamente en tablas. En el ejemplo 5, posterior, esto no se cumple. En casos similares, el uso de logaritmos puede en ocasiones evitarse por medio de las siguientes igualdades introducidas en los problemas del capítulo 9:

$$s_{\overline{h+k}|i} \;=\; s_{\overline{h}|i} + (1+i)^h\,s_{\overline{k}|i} \qquad (3)$$

$$s_{\overline{h-k}|i} \;=\; s_{\overline{h}|i} - (1+i)^h\,a_{\overline{k}|i} \qquad (4)$$

$$a_{\overline{h+k}|i} \;=\; a_{\overline{h}|i} + (1+i)^{-h}\,a_{\overline{k}|i} \qquad (5)$$

$$a_{\overline{h-k}|i} \;=\; a_{\overline{h}|i} - (1+i)^{-h}\,s_{\overline{k}|i} \qquad (6)$$

Las fórmulas (*3*)-(*6*) fueron deducidas con la suposición que h y k son enteros positivos. En este capítulo, las utilizaremos cuando k es una fracción. Por ejemplo, de (*3*),

$$s_{\overline{5\,1/2}|i} \;=\; s_{\overline{5+1/2}|i} \;=\; s_{\overline{5}|i} + (1+i)^5\,s_{\overline{1/2}|i}$$

En el problema 6 se establece que símbolos tales como $s_{\overline{5\,1/2}|i}$ y $a_{\overline{3\,1/4}|i}$ tienen significado.

Ejemplo 5.

Hallar el monto y el valor presente de una anualidad de \$100 al final de cada mes, durante 40 meses, suponiendo intereses de 5% efectivo.

El intervalo de pago es 1 mes y el período de interés es 1 año; hay dos intervalos de pago por período de interés. El pago equivalente anual X está dado por

$$X \;=\; 100\,\frac{1}{s_{\overline{1/12}|.05}}$$

Ahora el plazo es 40 meses o sea $3\frac{1}{3}$ períodos de interés. Utilizando (*3*) con $h = 3$ y $k = \frac{1}{3}$,

$$S \;=\; X\,s_{\overline{3\,1/3}|.05} \;=\; X\,[s_{\overline{3}|.05} + (1{,}05)^3\,s_{\overline{1/3}|.05}]$$

$$=\; 100\,[s_{\overline{3}|.05} + (1{,}05)^3\,s_{\overline{1/3}|.05}]\,\frac{1}{s_{\overline{1/12}|.05}}$$

$$=\; 100\,[3{,}15250 + (1{,}15762)(0{,}32793)]\,(12{,}27258) \;=\; \$4334{,}82$$

y, utilizando (*5*) con $h = 3$ y $k = \frac{1}{3}$,

$$A \;=\; X\,a_{\overline{3\,1/3}|.05} \;=\; X\,[a_{\overline{3}|.05} + (1.05)^{-3}\,a_{\overline{1/3}|.05}]$$

$$=\; 100\,[a_{\overline{3}|.05} + (1{,}05)^{-3}\,a_{\overline{1/3}|.05}]\,\frac{1}{s_{\overline{1/12}|.05}}$$

$$=\; 100\,[2{,}72325 + (0{,}86384)(0{,}32264)]\,(12{,}27258) \;=\; \$3684{,}18$$

Véanse los problemas 7-8.

PAGO PERIODICO. Cuando se requiera el pago periódico R de una anualidad ordinaria general:

(i) Escribir la expresión dando el pago X por período de interés requerido.

(ii) Expresar la relación entre X y R, ya sea (*1*) o (*2*).

(iii) Eliminar X entre las dos relaciones y resolver para R.

Si las fórmulas (*3*)-(*6*) son necesarias, la decisión sobre una debe hacerse a la luz del ejemplo 5 y del problema 7.

Ejemplo 6.

Suponiendo un interés de 4% efectivo, ¿qué pagos iguales R hechos al final de cada trimestre durante 15 años amortizarán una deuda de \$20.000?

Al 4% efectivo, el pago *anual* necesario para amortizar la deuda está dado por

$$X \;=\; 20.000\,\frac{1}{a_{\overline{15}|.04}}$$

De (*2*),

$$X \;=\; R\,\frac{1}{s_{\overline{1/4}|.04}}$$

De donde

$$R\,\frac{1}{s_{\overline{1/4}|.04}} \;=\; 20.000\,\frac{1}{a_{\overline{15}|.04}}$$

y

$$R \;=\; 20.000\,\frac{1}{a_{\overline{15}|.04}}\,s_{\overline{1/4}|.04} \;=\; 20.000(0.0899411)(0{,}2463352) \;=\; \$443{,}11$$

Ejemplo 7.

La compañía XYZ desea tener \$20.000 en un fondo, al término de 10 años. ¿Qué depósito R hecho al final de cada año es necesario, si el fondo paga el 3% convertible semestralmente?

Al 3% convertible semestralmente, el depósito *semestral* X por 10 años, necesario para acumular \$20.000 está dado por

$$X = 20.000 \frac{1}{s_{\overline{20}|.015}}$$

de donde
$$R = X s_{\overline{2}|.015} = 20.000 \frac{1}{s_{\overline{20}|.015}} s_{\overline{2}|.015}$$
$$= 20.000(0,0432457)(2,01500) = \$1742,80$$

Véanse los problemas 9-10.

EL NUMERO DE PAGOS. El procedimiento para determinar el número de pagos completo y el pago parcial final, cuando es necesario, es similar al caso simple.
En este caso, la identidad

$$(1+i)^k \frac{1}{s_{\overline{k}|i}} = \frac{1}{a_{\overline{k}|i}} \quad \text{(siendo } k\text{, un número racional)} \qquad (7)$$

puede ser utilizada para simplificar los cálculos.

Ejemplo 8.

¿Cuántos depósitos anuales de \$1000 y qué depósito final, un año después serán necesarios para acumular \$15.000 si el fondo gana el 4% convertible trimestralmente?

Designemos con X el depósito trimestral equivalente. Tenemos que

$$X s_{\overline{n}|.01} = 15.000 \quad \text{y} \quad X = 1000 \frac{1}{s_{\overline{4}|.01}}$$

Por lo cual
$$1000 s_{\overline{n}|.01} \frac{1}{s_{\overline{4}|.01}} = 15.000$$

y
$$s_{\overline{n}|.01} = 15 s_{\overline{4}|.01} = 15(4,06040100) = 60,90601500$$

Interpolando en la tabla XII, hallamos que n = 47,8 aproximadamente; por lo tanto son necesarios 11 depósitos anuales de \$1000. Sea Y el depósito final requerido un año después. Utilizando como fecha focal la fecha del depósito final, tenemos

tenemos

$$Y = 15.000 - X s_{\overline{44}|.01} (1,01)^4$$
$$= 15.000 - 1000 s_{\overline{44}|.01} \frac{1}{s_{\overline{4}|.01}} (1,01)^4$$
$$= 15.000 - 1000 s_{\overline{44}|.01} \frac{1}{a_{\overline{4}|.01}} \quad \text{[por (7)]}$$
$$= 15.000 - 1000(54,931757)(0,256281) = \$922,03$$

Véanse los problemas 11-13.

LA TASA DE INTERES. Para hallar la tasa de interés involucrada en una anualidad general, resuélvase primero la anualidad simple equivalente.

Ejemplo 9

Una compañía financiera anuncia préstamos de \$402,92 para ser pagados con 18 pagos mensuales de \$28 cada uno. Hallar la tasa efectiva cargada.

Designemos con i la tasa cargada mensual. De donde

$$28\, a_{\overline{18}|i} = 402,92 \quad \text{y} \quad a_{\overline{18}|i} = 14,3900$$

Interpolando en la tabla XIII, hallamos que i = 0,02471. La tasa efectiva equivalente r es

$$r = (1,02471)^{12} - 1 = 0,3403 \quad \text{(usando logaritmos)}$$

Por tanto la tasa efectiva cargada es 34,03%.

Véanse los problemas 16-17.

Problemas resueltos

1. Con intereses de 4% convertible trimestralmente, ¿qué pago X hecho al final de cada trimestre es equivalente a \$500 al final de cada medio año?

Se requiere distribuir cada pago de \$500 en dos pagos de X cada uno. De (*1*),

$$X = 500 \frac{1}{s_{\overline{2}|.01}} = 500(0,49751) = \$248,76$$

2. Con intereses al 5% efectivo, ¿qué pago X hecho al final de cada año es equivalente a \$250 al final de cada trimestre?

Se requiere combinar 4 pagos de \$250 cada uno en un pago único X. De (*2*),

$$X = 250 \frac{1}{s_{\overline{1/4}|.05}} = 250(4,07424) = \$1018,56$$

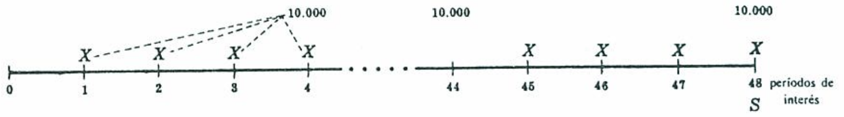
3. Con intereses al 6% convertible semestralmente, ¿qué pago X hecho al final de cada seis meses es equivalente a \$100 al principio de cada mes?

El valor de los 6 pagos hechos en un período de interés inmediatamente después que se ha hecho el último es, según (*2*),

$$S = 100 \frac{1}{s_{\overline{1/6}|.03}}$$

Por tanto
$$X = S(1,03)^{1/6} = 100 \frac{1}{s_{\overline{1/6}|.03}} (1,03)^{1/6} = 100 \frac{1}{a_{\overline{1/6}|.03}}$$
$$= 100(6,10457) = \$610,46$$

4. La compañía XYZ deposita \$10.000 al final de cada año en un fondo que gana intereses al 4% convertible trimestralmente. ¿Cuánto habrá en el fondo, al término de 12 años?



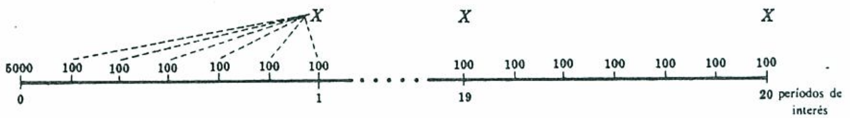
El intervalo de pago es un año y el período de interés es 3 meses; hay 4 períodos de interés por intervalo de pago. Para obtener una anualidad simple equivalente, cada depósito anual de \$10.000 debe ser distribuido en 4 depósitos trimestrales iguales X. De (*1*),

$$X = 10.000 \frac{1}{s_{\overline{4}|.01}}$$

Por lo cual $\quad S = X s_{\overline{48}|.01} = 10.000\, s_{\overline{48}|.01} \frac{1}{s_{\overline{4}|.01}}$

$$= 10.000(61{,}2226078)(0{,}2462811) = \$15.077{,}97$$

5. Una casa puede ser comprada con \$5000 de cuota inicial y \$100 al final de cada mes, por los próximos 10 años. Con intereses al 6% convertible trimestralmente, ¿cuál es el valor de contado C de la casa?



Considérese primero la anualidad general. El intervalo de pago es 1 mes y el período de interés es 6 meses; hay 6 pagos por período de interés. Para obtener una anualidad simple equivalente, los 6 pagos de \$100 cada uno en un período de interés deben ser combinados en un solo pago único X hecho al final del período de interés. De (*2*),

$$X = 100 \frac{1}{s_{\overline{1/6}|.03}}$$

De donde $C = 5000 + X a_{\overline{20}|.03} = 5000 + 100\, a_{\overline{20}|.03} \frac{1}{s_{\overline{1/6}|.03}}$

$$= 5000 + 100(14{,}87747)(6{,}07457) = 5000 + 9037{,}42 = \$14.037{,}42$$

6. Considérese una anualidad ordinaria general de R por intervalo de pago durante m intervalos de pago. Sea i la tasa de interés por período de interés y supóngase que los p períodos de interés son igual a los q intervalos de pago. Finalmente, sea j la tasa de interés por intervalo de pago equivalente a i por período de interés. En consecuencia el monto de la anualidad es

$$S = R s_{\overline{m}|j} = R \frac{(1+j)^m - 1}{j}$$

Sin embargo $(1+j)^q = (1+i)^p$; por tanto $1+j = (1+i)^{p/q}$ y

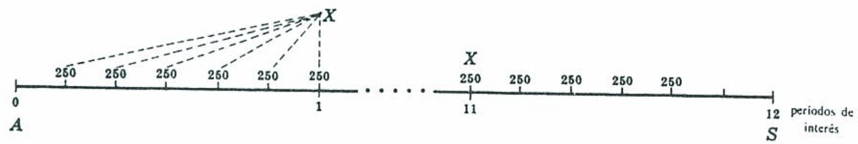
$$S = R \frac{(1+i)^{mp/q} - 1}{(1+i)^{p/q} - 1} = R \frac{(1+i)^{mp/q} - 1}{i} \cdot \frac{i}{(1+i)^{p/q} - 1} = R\, s_{\overline{mp/q}|i} \frac{1}{s_{\overline{p/q}|i}}$$

Tenemos ahora que mp/q es el número n de períodos de interés correspondiente a m intervalos de pago, por lo cual

$$S = X s_{\overline{n}|i}, \quad \text{de donde} \quad X = R \frac{1}{s_{\overline{p/q}|i}}$$

Es decir que $s_{\overline{n}|i}$ tiene significado aun no siendo n un entero. Similarmente, podemos demostrar que $a_{\overline{n}|i}$ tiene significado cuando n no es entero.

7. Hallar el monto y el valor presente de una anualidad de \$250 pagaderos al final de cada mes por 5 años 10 meses, suponiendo intereses al 4% convertible semestralmente.



El intervalo de pago es 1 mes y el período de interés es 6 meses; hay 6 pagos por período de interés. El pago equivalente semestral X está dado por

$$X = 250 \frac{1}{s_{\overline{1/6}|.02}}$$

Ahora el plazo es 5 años 10 meses, o sea $11\frac{2}{3}$ períodos de interés. Utilizando (*4*) con $h = 12$ y $k = \frac{1}{3}$,

$$S = X s_{\overline{11\,2/3}|.02} = X[s_{\overline{12}|.02} - (1{,}02)^{12} a_{\overline{1/3}|.02}]$$

$$= 250\,[s_{\overline{12}|.02} - (1{,}02)^{12} a_{\overline{1/3}|.02}] \frac{1}{s_{\overline{1/6}|.02}}$$

$$= 250\,[13{,}41209 - (1{,}26824)(0{,}32896)]\,(6{,}04981) = \$19.654{,}15$$

y utilizando (*6*) con $h = 12$ y $k = \frac{1}{3}$,

$$A = X a_{\overline{11\,2/3}|.02} = X[a_{\overline{12}|.02} - (1{,}02)^{-12} s_{\overline{1/3}|.02}]$$

$$= 250\,[a_{\overline{12}|.02} - (1{,}02)^{-12} s_{\overline{1/3}|.02}] \frac{1}{s_{\overline{1/6}|.02}}$$

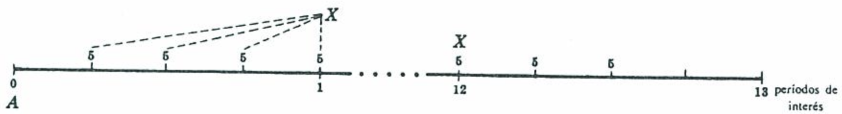
$$= 250\,[10{,}57534 - (0{,}78849)(0{,}33114)]\,(6{,}04981) = \$15.599{,}80$$

Nota. El uso de las fórmulas (*4*) y (*6*) en este caso, en lugar de las (*3*) y (*5*) como en el ejemplo 5, es para permitir el uso de las tablas disponibles. Por ejemplo, la fórmula (*3*) produciría

$$s_{\overline{11\,2/3}|.02} = s_{\overline{11}|.02} + (1{,}02)^{11} s_{\overline{2/3}|.02}$$

de la cual $s_{\overline{2/3}|.02}$ tendría que ser calculado con logaritmos.

8. Un contrato estipula el pago de \$5 al final de cada semana durante 50 semanas. Hallar el equivalente en efectivo del contrato suponiendo intereses al $7\frac{1}{2}$% convertible mensualmente.



El intervalo de pago es 1 semana y el período de interés es 1 mes; hay 4 pagos por período de interés. El pago mensual equivalente X está dado por

$$X = 5 \frac{1}{s_{\overline{1/4}|.00625}}$$

Ahora el plazo es 50 semanas o sea $12\frac{1}{2}$ períodos de interés. En consecuencia

$$A = X a_{\overline{12\,1/2}|.00625} = 5\, a_{\overline{12\,1/2}|.00625} \frac{1}{s_{\overline{1/4}|.00625}}$$

Puesto que $\frac{5}{8}$% no está tabulado, deben utilizarse logaritmos. Escribimos

$$A = 5 \frac{1 - (1{,}00625)^{-12\,1/2}}{0{,}00625} \cdot \frac{0{,}00625}{(1{,}00625)^{1/4} - 1} = 5 \frac{1 - (1{,}00625)^{-12\,1/2}}{(1{,}00625)^{1/4} - 1}$$

Ahora $\log 1{,}00625 = 0{,}0027059$; por lo cual

$$\log (1{,}00625)^{-12\,1/2} = 12{,}5 \operatorname{colog} (1{,}00625) = 9{,}9661762 - 10$$

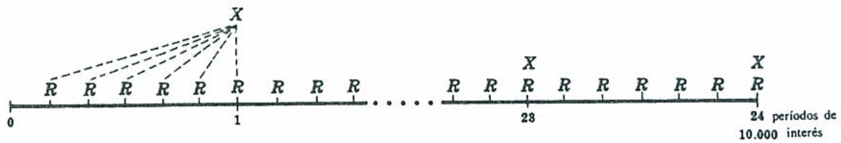
de tal forma que $\qquad (1{,}00625)^{-12\,1/2} = 0{,}92507$

y $\log(1{,}00625)^{1/4} = \frac{1}{4}\log 1{,}00625 = 0{,}0006765$

de tal forma que $(1{,}00625)^{1/4} = 1{,}00156$

Por lo cual $A = 5\frac{0{,}07493}{0{,}00156} = \$240{,}16$

9. La compañía XYZ desea acumular $10.000 en un fondo, al término de 12 años. ¿Qué depósito R al final de cada mes debe hacerse, si el fondo paga el 4% convertible semestralmente?



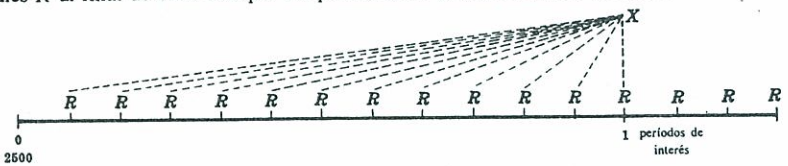
El depósito X hecho al final de cada seis meses durante 12 años, cuyo monto sea $10.000 está dado por

$$X = 10.000\frac{1}{s_{\overline{24|}.03}}$$

De (2) $X = R\frac{1}{s_{\overline{1/6|}.03}}$

Por lo cual $R = 10.000\frac{1}{s_{\overline{24|}.03}}\, s_{\overline{1/6|}.03} = 10.000(0{,}0290474)(0{,}1646207) = \$47{,}82$

10. Un automóvil cuyo valor de contado es $3500 es vendido con $1000 de cuota inicial y con pagos iguales R al final de cada mes por los próximos 15 meses. Hallar R si el interés es de 8% efectivo.



Designemos con X el pago anual equivalente; con lo que

$$X a_{\overline{1\,1/4|}.08} = 2500$$

De (2), $X = R\frac{1}{s_{\overline{1/12|}.08}}$

Por lo cual
$$R = 2500\frac{1}{a_{\overline{1\,1/4|}.08}}\, s_{\overline{1/12|}.08}$$
$$= 2500\frac{1}{a_{\overline{1|}.08} + (1{,}08)^{-1}a_{\overline{1/4|}.08}}\, s_{\overline{1/12|}.08}$$
$$= 2500\frac{1}{0{,}925926 + (0{,}925926)(0{,}238204)}(0{,}080425) = \$175{,}37$$

11. M compra un coche usado avaluado en $2500. Paga $500 de cuota inicial, acuerda pagar $100 al final de cada mes por todo el tiempo que sea necesario. Hallar el número de pagos completos y el pago final, un mes después si el interés es de 8% trimestral.

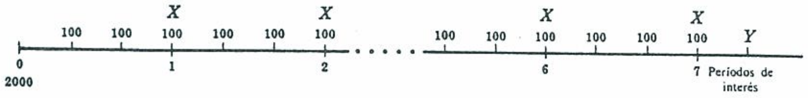
Designemos con X el pago trimestral equivalente. Tenemos que

$$X a_{\overline{n|}.02} = 2000 \quad \text{y} \quad X = 100\frac{1}{s_{\overline{1/3|}.02}}$$

Con lo que $100\, a_{\overline{n|}.02}\frac{1}{s_{\overline{1/3|}.02}} = 2000$

y $a_{\overline{n|}.02} = 20\, s_{\overline{1/3|}.02} = 20(0{,}33113548) = 6{,}62270960$

Interpolando en la tabla XIII, encontramos que $n = 7{,}2$ aproximadamente. Dado que hay 3 pagos por período de interés, se requieren 21 pagos completos.



Designemos con Y el pago final (22º). Utilizando la fecha de pago final como fecha focal, tenemos

$$Y = 2000(1{,}02)^{22/3} - X s_{\overline{7|}.02}(1{,}02)^{1/3}$$
$$= 2000(1{,}02)^{22/3} - 100\, s_{\overline{7|}.02}\frac{1}{s_{\overline{1/3|}.02}}(1{,}02)^{1/3}$$
$$= 2000(1{,}02)^{7}(1{,}02)^{1/3} - 100\, s_{\overline{7|}.02}\frac{1}{a_{\overline{1/3|}.02}}$$
$$= 2000(1{,}148686)(1{,}006623) - 100(7{,}43428)(3{,}03991) = \$52{,}64$$

12. ¿Cuántos depósitos de $50 cada uno y qué depósito final un mes después, serán necesarios para acumular $2500 suponiendo intereses al 3% convertible trimestralmente?

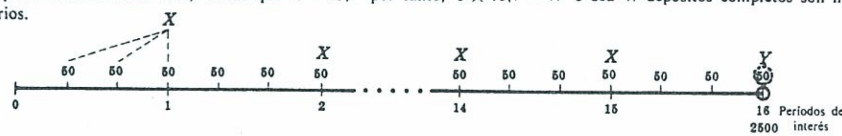
Designemos con X el depósito trimestral equivalente. Tenemos que

$$X s_{\overline{n|}.0075} = 2500 \quad \text{y} \quad X = 50\frac{1}{s_{\overline{1/3|}.0075}}$$

por lo que $50\, s_{\overline{n|}.0075}\frac{1}{s_{\overline{1/3|}.0075}} = 2500$

y $s_{\overline{n|}.0075} = 50\, s_{\overline{1/3|}.0075} = 50(0{,}33250345) = 16{,}62517250$

Interpolando en la tabla XII, vemos que $n = 15{,}7$ por tanto, $3 \times 15{,}7 = 47$ o sea 47 depósitos completos son necesarios.



Designemos con Y el depósito final (48º). Utilizando la fecha del depósito final como fecha focal, tenemos que

$$Y = 2500 - X s_{\overline{15\,2/3|}.0075}(1{,}0075)^{1/3}$$
$$= 2500 - 50\,[s_{\overline{16|}.0075} - (1.0075)^{16} a_{\overline{1/3|}.0075}]\frac{1}{s_{\overline{1/3|}.0075}}(1{,}0075)^{1/3}$$
$$= 2500 - 50\,[s_{\overline{16|}.0075} - (1.0075)^{16} a_{\overline{1/3|}.0075}]\frac{1}{a_{\overline{1/3|}.0075}}$$
$$= 2500 - 50\left[s_{\overline{16|}.0075}\frac{1}{a_{\overline{1/3|}.0075}} - (1.0075)^{16}\right]$$
$$= 2500 - 50\,[(16{,}9323)(3.0150) - 1{,}1270] = \$3{,}81$$

Como falta un solo depósito completo para alcanzar los 16 períodos de interés, es posible una solución simple. Suponiendo el depósito adicional (encerrado con un círculo en la línea de tiempo) y después restándolo, tenemos

$$Y = 2500 - [X s_{\overline{16|}.0075} - 50]$$
$$= 2500 - 50\left[s_{\overline{16|}.0075}\frac{1}{s_{\overline{1/3|}.0075}} - 1\right] = 2500 - 50[(16{,}9323)(3{,}0075) - 1] = \$3{,}81$$

13. M invierte $25.000 el día de hoy en un fondo que paga el $3\frac{1}{2}\%$ efectivo. Proyecta retirar $1000 cada 6 meses, haciendo el primer retiro dentro de 6 meses. Hallar el número de retiros completos y el retiro final 6 meses después el cual agotará totalmente el fondo.

Designemos con R el retiro anual equivalente a $1000 al final de cada semestre; tenemos que

$$R = 1000 \frac{1}{s_{\overline{1/2}|.035}}$$

Ahora $$R\, a_{\overline{n}|.035} = 1000 \frac{1}{s_{\overline{1/2}|.035}}\, a_{\overline{n}|.035} = 25.000$$

y $$a_{\overline{n}|.035} = 25\, s_{\overline{1/2}|.035} = 12{,}3925$$

Interpolando en la tabla XIII, $n = 16{,}53$; habrá 33 retiros de $1000 cada uno.

Designemos con Y el retiro final al final del 17º año. Procediendo como en la segunda solución del problema 12, tomando como fecha focal el final del 17º año, tenemos

$$Y = 25.000(1{,}035)^{17} - \left[1000 \frac{1}{s_{\overline{1/2}|.035}}\, s_{\overline{17}|.035} - 1000\right]$$

$$= 25.000(1{,}7946756) - 1000[(2{,}017350)(22{,}705016) - 1] = \$62{,}93$$

14. Suponiendo intereses al 4% efectivo, remplazar un pago R al final de cada año con pagos iguales X al principio de cada trimestre.

Sea j la tasa nominal convertible trimestralmente equivalente al 4% efectivo; tenemos que

$$(1 + j/4)^4 = 1{,}04 \quad \text{y} \quad 1 + j/4 = (1{,}04)^{1/4}$$

Los cuatro pagos de X constituyen una anualidad anticipada cuyo monto es

$$X(s_{\overline{5}|j/4} - 1) = R$$

Ahora $$s_{\overline{5}|j/4} - 1 = \frac{(1 + j/4)^5 - 1}{j/4} - 1 = \frac{(1{,}04)^{5/4} - 1}{(1{,}04)^{1/4} - 1} - 1$$

$$= \frac{(1{,}04)^{5/4} - (1{,}04)^{1/4}}{(1{,}04)^{1/4} - 1} = \frac{0{,}04}{1 - (1{,}04)^{-1/4}} = \frac{1}{a_{\overline{1/4}|.04}}$$

y $X = R\, a_{\overline{1/4}|.04}$.

15. Con intereses al 4% convertible trimestralmente, remplazar un pago de $2000 al final de cada 6 meses con pagos X, (*a*) al final de cada mes, (*b*) al principio de cada mes.

Designemos con R el pago al final de cada trimestre equivalente a $2000 al final de cada medio año; tenemos que

$$R = 2000 \frac{1}{s_{\overline{2}|.01}}$$

Sea j la tasa nominal convertible mensualmente equivalente al 4% convertible trimestralmente; tenemos que

$$(1 + j/12)^3 = 1{,}01 \quad \text{y} \quad 1 + j/12 = (1{,}01)^{1/3}$$

(*a*) $$X = R\, s_{\overline{1/3}|.01} = 2000 \frac{1}{s_{\overline{2}|.01}}\, s_{\overline{1/3}|.01} = 2000(0{,}497512)(0{,}332228) = \$330{,}57$$

(*b*) Del problema 14,

$$X = R\, a_{\overline{1/3}|.01} = 2000 \frac{1}{s_{\overline{2}|.01}}\, a_{\overline{1/3}|.01} = 2000(0{,}497512)(0{,}331128) = \$329{,}48$$

Nota. Las partes (*a*) y (*b*) han sido resueltas en forma independiente; por supuesto, la solución de cualquier parte puede ser obtenida directamente de la otra. Si $X_a = \$330{,}57$ y $X_b = \$329{,}48$ tenemos que

$$X_b = X_a(1{,}01)^{-1/3} \quad \text{y} \quad X_a = X_b(1{,}01)^{1/3}$$

16. Si se emplea 15 meses para pagar un préstamo de $500, a $40 mensuales, ¿qué tasa nominal convertible semestralmente se está cargando?

Designemos con i la tasa mensual que está siendo cargada. Tenemos que

$$40\, a_{\overline{15}|i} = 500 \quad \text{y} \quad a_{\overline{15}|i} = 12{,}5000$$

Interpolando en la tabla XIII, encontramos que $i = 0{,}02373$. Si j es la tasa equivalente nominal convertible semestralmente, tenemos que

$$1 + j/2 = (1{,}02373)^6$$

y $j = 0{,}3022$, usando logaritmos. Por tanto la tasa requerida es 30,22% convertible semestralmente.

17. El monto de una anualidad de $100 mensuales por 5 años es $6900. Hallar la tasa nominal convertible trimestralmente que se está ganando.

Designemos con i la tasa mensual. Tenemos que

$$100\, s_{\overline{60}|i} = 6900 \quad \text{y} \quad s_{\overline{60}|i} = 69{,}0000$$

Interpolando en la tabla XII, tenemos que $i = 0{,}00464$. Si j es la tasa nominal equivalente convertible trimestralmente, tenemos que

$$1 + j/4 = (1{,}00464)^3$$

y $j = 0{,}0559$. Por tanto la tasa es 5,59% convertible trimestralmente.

Problemas propuestos

18. Con intereses al 3% convertible mensualmente, ¿qué pago X al final de cada mes sustituye pagos de $1000 al final de cada año? *Resp.* $82,19

19. Con intereses al 4% convertible trimestralmente, ¿qué pago X al final de cada trimestre sustituye pagos de $500 al final de cada mes? *Resp.* $1504,99

20. Hallar el monto y el valor presente de cada una de las siguientes anualidades:

	Pago	Intervalo de pago	Plazo	Tasa de interés
(*a*)	$ 500	6 meses	12 años	5% convertible trimestralmente
(*b*)	$1000	1 año	8 años	3% convertible mensualmente
(*c*)	$ 250	1 mes	10 años	5% convertible semestralmente
(*d*)	$ 500	3 meses	8 años	6% efectivo

Resp. (*a*) $16.205,67; $8927,00 (*c*) $38.714,21; $23.626,15
(*b*) 8905,51; $7007,42 (*d*) $20.234,92; $12.695,62

21. B deposita $150 al final de cada mes, en un banco que paga el 4% convertible semestralmente. ¿Cuánto tendrá en su cuenta después de 5 años? *Resp.* $9936,56

22. El comprador de una granja pagará $10.000 de inmediato y $1000 al final de cada 6 meses durante 10 años. Si el interes es de 5% convertible trimestralmente, ¿cuál es el valor en efectivo de la granja? *Resp.* $25.566,16

23. Un bono de $1000, EJ 5% es redimible a la par el 1o. de enero de 1978. Hallar el precio de compra al 1o. de julio de 1962, para ganar el 4% convertible trimestralmente. *Resp.* $1112,22

24. Hallar el monto y el valor presente de una anualidad anticipada de $800 cada año durante 6 años, con intereses al 4% convertible trimestralmente.

Resp. $S = 800\ s_{\overline{24}|.01}\dfrac{1}{a_{\overline{4}|.01}} = \$5530{,}21$; $A = \$4355{,}40$

25. ¿Qué cantidad tendría que ser invertida al final de cada 3 meses por 6 años, al 5% convertible semestralmente, para tener $5000 al final del plazo? *Resp.* $180,10

26. ¿Qué cantidad tendría que ser invertida al final de cada año por los próximos 8 años, al 4% convertible semestralmente, para tener $5000 al final del plazo? *Resp.* $541,86

27. El día de hoy se invierten $75.000 al 3% convertible trimestralmente para proporcionar a M un ingreso anual durante 25 años, recibiendo el primer pago dentro de 10 años. Hallar el pago anual. *Resp.* $5657,79

28. Con intereses al 6% convertible trimestralmente, sustituir pagos de $2000 al final de cada año por pagos equivalentes de X. (*a*) al final de cada mes, (*b*) al principio de cada mes. *Resp.* (*a*) $162,15; (*b*) $161,35

29. Con intereses al 5% convertible semestralmente, sustituir un pago de $2000 al principio de cada año por pagos equivalentes X. (*a*) al final de cada mes, (*b*) al principio de cada mes.
Resp. (*a*) $171,17; (*b*) $170,47

30. Resolver el ejemplo 6 si el pago R se hace al principio de cada trimestre. *Resp.* $438,79

31. Con intereses al 5% convertible trimestralmente, ¿qué pagos iguales X hechos al final de cada 6 meses por 10 años amortizarán una deuda de $12.000? *Resp.* $770,90

32. Resolver el problema 31 si los pagos X se hacen al principio de cada semestre. *Resp.* $751,98

33. K puede ahorrar $125 mensuales e invertirlos al 5% convertible semestralmente. Hallar el número de depósitos completos y el depósito final que se hará un mes después, con el objeto de tener $10.000 en el fondo. *Resp.* 69; $5,23

34. M compra una anualidad de $300 al final de cada trimestre en $9000. Con intereses al $3\frac{1}{2}$% convertible semestralmente, hallar el número de pagos completos y el pago final 3 meses después para agotar totalmente el pago.
Resp. 34; $277,46

35. Una granja es vendida por $12.000 de cuota inicial y 6 pagos semestrales de $2500, el primero con vencimiento al final de $2\frac{1}{2}$ años. Hallar el valor en efectivo de la granja, suponiendo intereses al 5%.

Resp. $12.000 + 2500\dfrac{1}{s_{\overline{1/2}|.05}}[a_{\overline{5}|.05} - a_{\overline{2}|.05}]$

36. Una institución de crédito anuncia préstamos de $1756,20 para ser pagados en 36 pagos mensuales de $60 cada uno. Hallar la tasa efectiva de interés cargada. *Resp.* 14,92%

37. Una compañía financiera anuncia préstamos de $99,40 para ser pagados en 12 pagos mensuales de $10 cada uno. Hallar la tasa efectiva de interés cargada. *Resp.* 42,98%

38. Una institución de crédito anuncia préstamos de $1260 para ser pagados en 30 pagos mensuales de $50 cada uno. Hallar la tasa efectiva de interés cargada. *Resp.* 14,91%

39. Una estufa avaluada en $250 es vendida con $20 de cuota inicial y $20 mensuales por los próximos 13 meses. Hallar la tasa efectiva cargada. *Resp.* 23,87%

40. Demostrar que: $(1+i)^k \dfrac{1}{s_{\overline{k}|i}} = \dfrac{1}{a_{\overline{k}|i}}$.

Capítulo 15

Probabilidad y la tabla de mortalidad

CADA PERSONA TIENE ALGUNA IDEA de lo que se quiere decir con oportunidad o probabilidad, esto es, lo que significa decir que M tiene una oportunidad en tres de ganar un juego o que la probabilidad de ganar el juego es 1/3. Al estimar la probabilidad que ciertos eventos ocurran o no ocurran podemos, como en el caso de sacar una figura de una baraja, contar el número de diferentes maneras en que el evento puede o no ocurrir. Por otra parte, en el caso de estimar la probabilidad que una persona que ahora tiene 25 años viva para recibir una herencia a la edad de 30 años, estamos obligados a depender de alguna información disponible sobre lo que ha pasado en ocasiones similares. En el primer caso, el resultado se conoce como *probabilidad matemática o teórica;* en el segundo caso el resultado se conoce como *probabilidad estadística* o *empírica.*

PROBABILIDAD MATEMATICA. Si un evento tiene que resultar en alguna de n diferentes pero *igualmente posibles* maneras y si ciertas s de esas maneras son consideradas aciertos, mientras que las otras $f = n - s$ maneras son consideradas fallas, entonces, la probabilidad de acierto en un experimento dado está definida como $p = s/n$ y la probabilidad de fallar está definida como $q = f/n$.

Dado que $p + q = \dfrac{s}{n} + \dfrac{f}{n} = \dfrac{s+f}{n} = \dfrac{n}{n} = 1$, tenemos que $p = 1 - q$ y $q = 1 - p$.

Ejemplo 1.

Se saca una carta de una baraja ordinaria de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad, (*a*) que sea roja? (*b*) que sea una espada? (*c*) que sea un rey? (*d*) que no sea un as de espadas? (*e*) que no sea ni una jota ni una reina?

Una carta puede ser sacada de una baraja en $n = 52$ maneras.

(*a*) Una carta roja puede ser sacada de una baraja en $s = 26$ diferentes maneras. La probabilidad de sacar una carta roja es $s/n = 26/52 = 1/2$.

(*b*) Una espada puede ser sacada de una baraja en $s = 13$ diferentes maneras. La probabilidad de sacar una espada es $s/n = 13/52 = 1/4$.

(*c*) Un rey puede ser sacado de una baraja en 4 diferentes maneras. La probabilidad de sacar un rey es $4/52 = 1/13$.

(*d*) El as de espadas puede ser sacado únicamente de 1 manera: La probabilidad de sacar un as de espadas es $1/52$. La probabilidad de no sacar un as de espadas es $1 - 1/52 = 51/52$. En este caso hemos contado primero el número de fallas; podríamos también haber contado el número de aciertos.

(*e*) Una jota o una reina pueden ser sacadas en 8 maneras; la probabilidad de sacar una jota o una reina es $8/52 = 2/13$. La probabilidad de no sacar una jota o una reina es $1 - 2/13 = 11/13$.

Véanse los problemas 1-3.

PROBABILIDAD ESTADISTICA. Si se ha observado que un cierto resultado sucede s veces en n pruebas, la razón s/n es definida como la probabilidad estadística o empírica de que el mismo resultado ocurra en cualquier prueba futura. La confianza que pueda ser puesta en dichas pruebas depende en gran parte del número de observaciones; mientras mayor sea el número, mayor es la confiabilidad. Por ejemplo, los registros sobre los pasados 25 años muestran que en cierta

localidad el tiempo despejado prevalece en promedio durante 292 días cada año. Con base en esta información la probabilidad que haya precipitación en un determinado día es

$$\frac{365-292}{365} = \frac{1}{5}$$

ESPERANZA MATEMATICA. Si p es la probabilidad que M reciba una cierta cantidad S, entonces pS, se conoce como su *esperanza matemática.*

Ejemplo 2.

M ganará $5 si saca una bola roja al primer intento, de una urna que contiene 3 bolas negras y 2 rojas. ¿Cuál es su esperanza matemática?

La probabilidad de sacar una bola roja de la urna, al primer intento, es $p = 2/5$; por tanto, la esperanza matemática de M es $\frac{2}{5}(5) = \$2$. Esto también podría ser la cuota que M podría pagar por el privilegio de hacer un intento ya que si hiciera un mayor número de intentos debería esperar salir a la par.

Si pS es la esperanza que M reciba dentro de n años una cantidad S, el valor presente de su esperanza matemática, suponiendo una tasa de interés i, es

$$(1+i)^{-n}\,pS$$

Ejemplo 3.

Con base en los registros del colegio ABC de los pasados 20 años, la probabilidad que un estudiante aceptado se gradúe 4 años más tarde es 0,65. A M le prometieron $10.000 si se gradúa dentro de 4 años. Suponiendo intereses al $2\frac{1}{2}\%$, hallar el valor presente de su esperanza matemática.

La esperanza matemática de M es $pS = 0{,}65(10.000) = \$6500$. El valor actual, al $2\frac{1}{2}\%$, de su esperanza matemática es

$$6500(1{,}025)^{-4} = 6500(0{,}905951) = \$5888{,}68$$

Véase el problema 4.

TABLAS DE MORTALIDAD. Una tabla de mortalidad es simplemente un resumen de los registros de vida de un grupo representativo de individuos suficientemente grande. La tabla más conocida es la tabla de mortalidad, Experiencia Americana publicada por primera vez en 1868. Generalmente ha sido remplazada por la tabla CSO o sea, la Tabla de Mortalidad Estándar Ordinaria de los Comisionados de 1941, basada en datos compilados por las compañías de seguros durante el período 1930-40. Nosotros basaremos nuestros cálculos en esta tabla. Sin embargo, debe ser entendido, que mientras que las compañías de seguros utilizan generalmente la tabla CSO para el seguro de vida, otra tabla (no incluida aquí) es usada para anualidades. La tabla CSO, que consiste de las tres primeras columnas de la tabla XV, es en esencia la historia de la vida de un grupo original de $l_0 = 1.023.102$ individuos, de los cuales $l_1 = 1.000.000$ estaban vivos a la edad de 1 año. Aquí, la edad de un individuo la designaremos con x, mientras que el número que del grupo original alcanza la edad x lo designaremos con l_x (sobrevivientes a la edad x). La tabla supone que ninguna persona alcanzará 100 años de edad. Esto simplemente indica que en nuestra época el porcentaje de individuos que alcanzan o viven más allá de los 100 años es tan pequeño que no tiene un efecto apreciable sobre las primas de seguros. La tercera columna encabezada por d_x (muertes a la edad x), nos da el número de muertes en el año comprendido entre las edades x y $x+1$. Por tanto

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Las demás columnas de la tabla XV se explicarán en los siguientes capítulos.

Ejemplo 4.

Del grupo original

(*a*) $l_{20} = 951.483$ están vivos a los 20 años de edad.

(*b*) $d_{25} = 2705$ mueren entre los 25 y 26 años, esto es, mueren durante el año en que tienen 25 años de edad.

(*c*) $l_{20} - l_{30} = 951.483 - 924.609 = 26.874$ mueren entre los 20 y 30 años, esto es, alcanzan los 20 años de edad, pero no alcanzan los 30.

De aquí en adelante designaremos por:

p_x, la probabilidad que una persona de edad x viva por lo menos un año, esto es, que alcance la edad $x+1$.

${}_np_x$, la probabilidad que una persona de edad x viva por lo menos n años, esto es, que alcance la edad $x+n$.

q_x, la probabilidad que una persona de edad x, no viva un año completo, esto es, que no alcance la edad $x+1$.

${}_nq_x$, la probabilidad que una persona de edad x no viva por n años, esto es, que no alcance la edad $x+n$.

Ejemplo 5.

Hallar la probabilidad que una persona de 20 años de edad viva por lo menos un año.

De la tabla CSO $l_{20} = 951.483$ y $l_{21} = 949.171$.

Redondeando a 5 decimales, tenemos, $p_{20} = \dfrac{l_{21}}{l_{20}} = \dfrac{949.171}{951.483} = 0{,}99757.$

Ejemplo 6.

Hallar la probabilidad que una persona de 20 años de edad viva por lo menos 30 años.

Se requiere hallar la probabilidad que una persona de 20 años alcance los 50 años, como $l_{20} = 951.483$ y $l_{50} = 810.900$, redondeando a 5 decimales tenemos que

$${}_{30}p_{20} = \frac{l_{50}}{l_{20}} = \frac{810.900}{951.483} = 0{,}85225$$

Ejemplo 7.

Hallar la probabilidad que una persona de 25 años muera antes de alcanzar los 65 años.

Se requiere hallar la probabilidad que una persona de 25 años no sobreviva los próximos $65 - 25 = 40$ años.

El número de personas que mueren entre los 25 y 65 años es $l_{25} - l_{65}$; por lo cual

$${}_{40}q_{25} = \frac{l_{25}-l_{65}}{l_{25}} = \frac{939.197 - 577.882}{939.197} = 0{,}38471$$

Véase el problema 5.

UN DOTAL PURO es una promesa de pagar a una persona una cierta cantidad en una fecha futura especificada, en el entendido que esté vivo para recibirla. Suponiendo una tasa de interés i, encontraremos el valor presente ${}_nE_x$, de un dotal puro de 1 pagadero a una persona que teniendo ahora una edad x, alcance la edad $x+n$. La probabilidad que una persona de edad x cumpla la edad $x+n$ es

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Por tanto su esperanza matemática es $\dfrac{l_{x+n}}{l_x}(1)$ y el valor presente de dicha esperanza matemática es

$${}_nE_x = (1+i)^{-n}\frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad (1)$$

Ejemplo 8.

Hallar el valor presente de un dotal puro de $1000 para M, que tiene ahora 25 años, pagadero cuando alcance la edad de 65 años, suponiendo intereses de 3%.

En este caso $x = 25$, $n = 65 - 25 = 40$, $i = 0{,}03$; de (*1*) tenemos,

$$1000\,{}_{40}E_{25} \;=\; 1000(1{,}03)^{-40}\frac{l_{65}}{l_{25}} \;=\; 1000(0{,}306557)\,\frac{577.882}{939.197} \;=\; \$188{,}62$$

Véase el problema 6.

Nota 1. Daremos una segunda demostración de (*1*) siguiendo un argumento que será utilizado repetidamente en los próximos capítulos. Supóngase que l_x personas, todas de edad x, acuerdan el día de hoy contribuir por partes iguales en un fondo que después de n años, a la taza i, tendrá lo suficiente para pagar $1 a cada una de las personas que alcancen la edad $x + n$. Puesto que sobrevivirán l_{x+n} personas, la cantidad necesaria después de n años será l_{x+n}.

El valor actual de dicha cantidad es

$$(1+i)^{-n}\,l_{x+n}$$

En consecuencia, cada miembro del grupo debe contribuir con

$${}_nE_x \;=\; (1+i)^{-n}\frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Nota 2. En la obtención de (*1*), no se hizo mención de ningún gasto conectado con la operación. Por esta razón, ${}_nE_x$ se conoce como costo neto o *prima neta* de un dotal puro. *La prima bruta*, esto es, la prima que la compañía cobraría por el dotal, se obtiene agregándole a la prima neta un *factor de recargo* para cubrir utilidades, comisiones de agentes y otras contingencias. Los métodos para calcular el factor de recargo varían de compañía en compañía; nosotros nos ocuparemos únicamente de primas netas.

Problemas resueltos

1. De una urna que contiene 8 bolas negras, 6 bolas blancas y 4 bolas rojas, es sacada una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad que la bola sacada, (*a*) sea negra? (*b*) no sea roja?

Una bola puede ser sacada de la urna de 18 maneras, de las cuales 8 son negras y $8 + 6 = 14$ no son rojas.

(*a*) La probabilidad de sacar una bola negra es $8/18 = 4/9$.
(*b*) La probabilidad de sacar una bola no roja es $14/18 = 7/9$.

2. De una baraja ordinaria M saca una carta, digamos la jota de diamantes. Sin remplazar esta carta, saca otra. ¿Cuál es la probabilidad que la segunda carta sea: (*a*) la jota de corazones? (*b*) otra jota? (*c*) una carta de menor valor que la jota?

Quedan ahora 51 cartas en la baraja de las cuales 3 son jotas.

(*a*) La probabilidad de sacar la jota de corazones es $1/51$.
(*b*) La probabilidad de sacar otra jota es $3/51 = 1/17$.
(*c*) Hay 36 cartas de menor valor que la jota. La probabilidad de sacar una de esas es $36/51 = 12/17$.

3. M gana si tira un total de 7 al lanzar un par de dados y pierde si tira un total de 11. Hallar la probabilidad, (*a*) que gane en la primera tirada, (*b*) que pierda en la primera tirada.

Un par de dados pueden presentarse de 36 diferentes maneras de las cuales 6 muestran 7 en total (6,1; 1,6; 5,2; 2,5; 4,3; 3,4) y 2 muestran un total de 11 (6,5; 5,6).

(*a*) La probabilidad de tirar 7 es $6/36 = 1/6$.
(*b*) La probabilidad de tirar 11 es $2/36 = 1/18$.

4. En una lotería el premio es de $20 y se han vendido 100 boletas. ¿Cuál es la esperanza matemática de B, si posee 8 boletos?

La probabilidad que B gane el premio es $8/100 = 0{,}08$; su esperanza matemática es $0{,}08(20) = \$1{,}60$.

5. Utilizando la tabla CSO, hallar la probabilidad que M, que ahora tiene 30 años, (*a*) alcance los 45 años, (*b*) no alcance los 65 años, (*c*) alcance los 45 pero no los 65, (*d*) muera a los 75 años.

Tenemos que $l_{30} = 924.609$.

(*a*) Como $l_{45} = 852.554$, $\quad {}_{15}p_{30} = \dfrac{l_{45}}{l_{30}} = \dfrac{852.554}{924.609} = 0{,}92207$.

(*b*) El número que muere entre los 30 y 65 años de edad es $l_{30} - l_{65} = 924.609 - 577.882 = 346.727$. En consecuencia

$${}_{35}q_{30} \;=\; \frac{l_{30}-l_{65}}{l_{30}} \;=\; \frac{346.727}{924.609} \;=\; 0{,}37500$$

(*c*) De las 924.609 personas vivas, de 30 años, $l_{45} - l_{65} = 852.554 - 577.882 = 274.672$ mueren entre 45 y 60 años. Por tanto la probabilidad requerida es

$$\frac{l_{45}-l_{65}}{l_{30}} \;=\; \frac{274.672}{924.609} \;=\; 0{,}29707$$

(*d*) De las 924.609 personas vivas a la edad de 30 años, $d_{75} = 28.009$ mueren en el año en que tienen 75 años. Por tanto la probabilidad requerida es

$$\frac{d_{75}}{l_{30}} \;=\; \frac{28.009}{924.609} \;=\; 0{,}03029$$

6. El día en que M cumple 30 años destina $5000 de sus ahorros a la compra de un dotal puro pagadero siempre y cuando alcance los 65 años. Suponiendo que sobrevive, ¿cuánto recibirá suponiendo intereses al 3%?

La prima neta por un dotal de 1 es ${}_{35}E_{30} = (1{,}03)^{-35}\dfrac{l_{65}}{l_{30}}$. [Véase la ecuación (*1*).]

Con $5000 el está en posibilidad de comprar un dotal de

$$\frac{5000}{{}_{35}E_{30}} \;=\; 5000(1{,}03)^{35}\frac{l_{30}}{l_{65}} \;=\; 5000(2{,}813862)\,\frac{924.609}{577.882} \;=\; \$22.510{,}84$$

Problemas propuestos

7. De una urna que contiene 8 bolas negras, 10 bolas blancas y 6 bolas rojas, una bola es sacada al azar. ¿Cuál es la probabilidad que la bola, (*a*) sea blanca? (*b*) sea roja? (*c*) no sea blanca? (*d*) no sea negra?
Resp. (*a*) 5/12, (*b*) 1/4, (*c*) 7/12, (*d*) 2/3

8. Si de la urna del problema 1 se saca una bola negra y no se remplaza, hallar la probabilidad que otra bola que se saca de la urna sea, (*a*) negra, (*b*) roja, (*c*) no blanca, (*d*) no roja. *Resp.* (*a*) 7/17, (*b*) 4/17, (*c*) 11/17, (*d*) 13/17

9. En el problema 2, hallar la probabilidad que la segunda carta sacada sea, (*a*) otro diamante, (*b*) la reina de corazones, (*c*) la jota de diamantes, (*d*) una carta de mayor valor que la jota.
Resp. (*a*) 4/17, (*b*) 1/51, (*c*) 0, (*d*) 4/17

10. De una baraja ordinaria M saca una carta y la vuelve a poner, y después de barajar saca otra carta. ¿Cuál es la probabilidad que saque la misma carta dos veces? *Resp.* 1/52

11. Cada uno de tres estuches idénticos tiene dos gavetas y cada gaveta contiene un relicario. En un estuche los dos relicarios son dorados; en otro ambos relicarios son plateados; y en el tercero un relicario es dorado y el otro es plateado. (*a*) A M se le permite seleccionar uno de los estuches y abrir una de las gavetas. Hallar la probabilidad que sea un relicario dorado. (*b*) Suponiendo que M ve un relicario dorado, hallar la probabilidad que hubiera visto un relicario dorado si hubiera abierto el otro cajón del estuche. *Resp.* (*a*) 1/2, (*b*) 2/3

12. En una cierta ciudad, cada año es robado un automóvil de cada 200. Suponiendo $1,25 para gastos y utilidad, ¿cuál es la prima anual que debería pagar un automovilista por un seguro contra robo de $1000? *Resp.* $6,25

13. Utilizando la tabla CSO, hallar, (*a*) el número de personas (de las 1.023.102 originales) vivos a la edad de 22 años, (*b*) el número de muertes entre los 45 y 46 años de edad, (*c*) el número de muertes entre los 45 y 50 años, (*d*) la edad en la que el número de vivos es aproximadamente el 50% de los vivos a la edad de 22 años.
Resp. (*a*) 946.789, (*b*) 7340, (*c*) 41.654, (*d*) 69

14. Calcular con tres cifras decimales la probabilidad que una persona que ahora tiene
(*a*) 30 años viva por lo menos un año.
(*b*) 65 años muera dentro de un año.
(*c*) 40 años muera dentro de los próximos 35 años.
(*d*) 25 años viva 40 años y muera dentro del año siguiente.
(*e*) 20 años viva a la edad de 65.
(*f*) 30 años muera a los 66 años.
Resp. (*a*) 0,996; (*b*) 0,040; (*c*) 0,642; (*d*) 0,024; (*e*) 0,607; (*f*) 0,026

15. N tiene justamente 18 años al ingresar a la universidad. Hallar la probabilidad que (*a*) sobreviva para graduarse 4 años después, (*b*) fallezca en el segundo año. *Resp.* (*a*) 0,990; (*b*) 0,002

16. La generación 1960 de un determinado colegio está formada por 200 personas de 21 años y 100 de 22. De acuerdo con la tabla CSO, ¿aproximadamente cuántos estarán vivos cuando celebren su 50o. aniversario? *Resp.* 132

17. Hallar la prima neta de un dotal puro de $5000 con vencimiento al término de 20 años si se compra a los, (*a*) 30 años, (*b*) 45 años, suponiendo intereses a $2\frac{1}{2}$%. *Resp.* (*a*) $2676,10; (*b*) $2068,28

18. Hallar el valor presente al $2\frac{1}{2}$%, de $1000 pagaderos al final de 20 años si, (*a*) el pago es cierto, (*b*) el pago es contingente sobre la vida de una persona que ahora tiene 40 años. *Resp.* (*a*) $610,27; (*b*) $468,25

19. M, que ahora tiene 10 años, recibirá $10.000 para su bachillerato si sobrevive a los 18 años y $10.000 para su educación universitaria si sobrevive a los 22 años. Hallar el valor presente de su esperanza matemática, suponiendo intereses al $2\frac{1}{2}$%.
Resp. $15.317,66

Capítulo 16

Anualidades contingentes

UNA ANUALIDAD CONTINGENTE es una anualidad cuyos pagos continúan por toda o parte de la vida de una persona en particular, llamada *rentista*. Como en el caso de las anualidades ciertas, los pagos pueden ser hechos anualmente, semestralmente, trimestralmente, etc., sin embargo, nos limitaremos a discutir exclusivamente las anualidades contingentes con pago anual. La tabla de mortalidad más generalmente usada para anualidades contingentes es la Standard Annuity de 1937. Como la designación de una tabla en particular en ninguna forma afecta la teoría, nosotros utilizaremos en su lugar la tabla CSO (tabla XV).

ANUALIDADES VITALICIAS. Una anualidad cuyo pago continúa mientras el rentista esté vivo se conoce como *anualidad vitalicia*. Si se han de hacer pagos al final de cada año a una persona que ahora tiene x años, esto es, el primer pago a la edad $x+1$, el segundo a la edad $x+2$, y así sucesivamente, a la anualidad se le llama *ordinaria* o *inmediata;* si los pagos se han de hacer al principio de cada año, esto es, el primer pago a la edad x, el segundo a la edad $x+1$ y así sucesivamente, a la anualidad se le conoce como *anticipada;* si el primer pago se ha de hacer a la edad $x+k+1$, el segundo a la edad $x+k+2$, y así sucesivamente, se dice que la anualidad es *diferida* por k años.

Una *anualidad ordinaria vitalicia* es simplemente un conjunto de dotales puros, pagaderos al final de 1, 2, 3, ... años, terminando con la muerte del rentista. Designando por a_x la *prima neta única* (valor presente) de una anualidad ordinaria vitalicia, de 1 por año, para una persona de edad x, tenemos

$$a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \cdots \text{ hasta el final de la tabla}$$
$$= (1+i)^{-1}\frac{l_{x+1}}{l_x} + (1+i)^{-2}\frac{l_{x+2}}{l_x} + (1+i)^{-3}\frac{l_{x+3}}{l_x} + \cdots \text{ hasta el final de la tabla}$$
$$= \frac{(1+i)^{-1}l_{x+1} + (1+i)^{-2}l_{x+2} + (1+i)^{-3}l_{x+3} + \cdots \text{ hasta el final de la tabla}}{l_x}$$

Para $x = 20$, el numerador de la expresión anterior consta de 79 términos, de donde nuestro problema inmediato es reducir la expresión a una forma más conveniente para los cálculos. Definimos

$$v = (1+i)^{-1}$$

y multiplicando numerador y denominador por v^x, obtenemos

$$a_x = \frac{v^{x+1}l_{x+1} + v^{x+2}l_{x+2} + v^{x+3}l_{x+3} + \cdots + v^{99}l_{99}}{v^x l_x}$$

Por medio de los símbolos conmutativos

$$D_x = v^x l_x \qquad \text{y} \qquad N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{99}$$

tenemos que

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots + D_{99}}{D_x}$$

y finalmente,

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \qquad (1)$$

Para una tasa de interés de $2\frac{1}{2}\%$, la cual será supuesta en lo que falta de este y el próximo capítulo, los valores de D_x y N_x están dados en la cuarta y quinta columnas de la tabla XV. En todos los cálculos redondearemos cada valor al entero más próximo.

Ejemplo 1.

Hallar la prima neta única de una anualidad vitalicia ordinaria de $1000 anuales, para una persona de 30 años.

Aplicando (*1*),

$$1000\, a_{30} = 1000 \frac{N_{31}}{D_{30}} = 1000 \frac{10.153.480}{440.801} = \$23.034{,}16$$

Una *anualidad vitalicia anticipada* de 1 por año consiste de un pago inmediato de 1 y de una anualidad vitalicia ordinaria de 1. La importancia de la anualidad vitalicia anticipada radica en el hecho que las primas del seguro de vida siempre se pagan al principio de cada período de pago.

Designando con $\ddot{a}_x$ la prima neta única de una anualidad vitalicia anticipada de 1 por año, para una persona de edad x, tenemos

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x = 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} = 1 + \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots + D_{99}}{D_x}$$

$$= \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{99}}{D_x}$$

o sea

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \qquad (2)$$

Ejemplo 2

Hallar la prima neta única de una anualidad vitalicia anticipada de $50 anuales, para una persona de 20 años de edad.

Aplicando (*2*), $50\,\ddot{a}_{20} = 50 \dfrac{N_{20}}{D_{20}} = 50 \dfrac{15.744.216}{580.662} = \$1355{,}71.$

Una *anualidad vitalicia ordinaria diferida por k años* es una secuencia de dotales puros, el primero pagadero al final de $k+1$ años, el segundo pagadero al final de $k+2$ años, ..., cesando los pagos con la muerte del rentista. Designando con ${}_{k|}a_x$ la prima neta única de una anualidad vitalicia ordinaria de 1, diferida por k años, para una persona de edad x, tenemos

$$ {}_{k|}a_x = {}_{k+1}E_x + {}_{k+2}E_x + {}_{k+3}E_x + \cdots \text{ hasta el final de la tabla}$$

$$= \frac{v^{k+1} l_{x+k+1} + v^{k+2} l_{x+k+2} + v^{k+3} l_{x+k+3} + \cdots \text{ hasta el final de la tabla}}{l_x}$$

$$= \frac{v^{x+k+1} l_{x+k+1} + v^{x+k+2} l_{x+k+2} + v^{x+k+3} l_{x+k+3} + \cdots + v^{99} l_{99}}{v^x l_x}$$

$$= \frac{D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + D_{x+k+3} + \cdots + D_{99}}{D_x}$$

y finalmente

$${}_{k|}a_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x} \qquad (3)$$

Ejemplo 3.

Hallar la prima neta única de una anualidad vitalicia de $1000, para una persona de 45 años de edad, teniendo que hacerse el primer pago a la edad de 65 años.

Esta es una anualidad vitalicia ordinaria diferida por 19 años. Utilizando (*3*), tenemos

$$1000\; {}_{19|}a_{45} = 1000 \frac{N_{65}}{D_{45}} = 1000 \frac{1.172.130}{280.639} = \$4176{,}65$$

La prima neta única de una *anualidad vitalicia anticipada de 1 por año, diferida por k años*, para una persona de edad x, está dada por

$${}_{k|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+k}}{D_x} \qquad (4)$$

La anualidad del ejemplo 3 puede considerarse como una anualidad vitalicia anticipada diferida por 20 años.

Aun cuando los símbolos (a's) utilizados para los diferentes tipos de anualidades vitalicias son uniformes, su importancia es relativa. Lo que es importante es que cada uno es igual a

$$N_y/D_x$$

donde x es la edad del rentista cuando se compra la anualidad y y es su edad cuando se hace el primer pago. Por ejemplo, para una anualidad vitalicia ordinaria de 1, comprada a los 25 años de edad, que estipula el primer pago un año después, esto es, a los 26 años, la prima neta única es N_{26}/D_{25}. Para el mismo rentista una anualidad vitalicia anticipada de 1 diferida por 15 años, estipula el primer pago a 40 años de edad; la prima neta única es N_{40}/D_{25}. El lector deberá analizar en forma similar los otros tipos de anualidades vitalicias.

Véanse los problemas 1-3.

UNA ANUALIDAD CONTINGENTE TEMPORAL difiere de la anualidad vitalicia en que termina después de un número especificado de pagos, aun cuando el rentista continúe con vida. Por ejemplo, una anualidad ordinaria contingente temporal a 20 años de $1000 anuales, estipula pagos anuales de $1000 cada uno hasta que se hayan hecho un total de 20 o el rentista muera, cesando el pago en cualquier caso. Claramente, puede pensarse una anualidad ordinaria vitalicia como una anualidad ordinaria contingente temporal a n años más una anualidad ordinaria vitalicia diferida por n años. En consecuencia, designando la prima neta única de una anualidad ordinaria contingente temporal a n años de 1 por año, para una persona de edad x, por $a_{\overline{x:n}|}$, tenemos

$$a_{\overline{x:n}|} = a_x - {}_{n|}a_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \qquad (5)$$

Ejemplo 4.

Hallar la prima neta única de una anualidad ordinaria contingente temporal a 15 años, de $1000 anuales, para una persona de 45 años.

Utilizando (*5*) tenemos

$$1000\, a_{\overline{45:15}|} = 1000 \frac{N_{46} - N_{61}}{D_{45}} = 1000 \frac{4.881.357 - 1.711.567}{280.639} = \$11.294{,}90$$

La prima neta única $\ddot{a}_{\overline{x:n}|}$ de una anualidad contingente temporal anticipada a n-años, de 1 por año, para una persona de edad x, está dada por

$$\ddot{a}_{\overline{x:n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \qquad (6)$$

Véase el problema 4.

UNA PÓLIZA DE ANUALIDAD proporciona un medio por el cual, pagando primas anuales iguales durante un período dado, una persona crea una pensión cuyos pagos se inician en una fecha especificada y continúan de por vida. El pago de primas constituye una anualidad contingente temporal anticipada, ya que la primera vence al comprar la póliza; puede considerarse que los pagos de la pensión forman una anualidad vitalicia anticipada diferida.

Ejemplo 5.

A los 30 años de edad, M compra una anualidad vitalicia la cual le pagará $2500 a los 66 años de edad, continuando el pago cada año. Las primas anuales R son pagaderas durante 36 años. Hallar R.

A los 30 años de edad, M compra una anualidad vitalicia anticipada de $2500 anuales, diferida por 36 años, con valor presente de $2500\,{}_{36|}\ddot{a}_{30}$; las primas anuales constituyen una anualidad contingente temporal anticipada a 36 años con valor presente $R\,\ddot{a}_{\overline{30:36}|}$. Por tanto

$$R\,\ddot{a}_{\overline{30:36}|} = 2500\,{}_{36|}\ddot{a}_{30} \quad \text{o sea} \quad R\,\frac{N_{30}-N_{66}}{D_{30}} = 2500\,\frac{N_{66}}{D_{30}}$$

$$R = 2500\,\frac{N_{66}}{N_{30}-N_{66}} = 2500\,\frac{1.056.042}{10.594.280-1.056.042} = \$276{,}79$$

Véanse los problemas 5-6.

Problemas resueltos

1. Hallar la prima neta única de una anualidad vitalicia anticipada de $1000 anuales, diferida por 15 años, para una persona de 50 años.

Utilizando (4), $\quad {}_{k|}\ddot{a}_x = \dfrac{N_{x+k}}{D_x}$

tenemos

$$1000\,{}_{15|}\ddot{a}_{50} = 1000\,\frac{N_{65}}{D_{50}} = 1000\,\frac{1.172.130}{235.925} = \$4968{,}23$$

2. Una viuda de 55 años desea que se le liquide la suma asegurada de una póliza de $25.000 en forma de una anualidad vitalicia anticipada. Hallar la renta anual de la anualidad.

Sea R el pago anual requerido de una anualidad vitalicia anticipada. Utilizando (4), tenemos

$$R\,\ddot{a}_{55} = R\,\frac{N_{55}}{D_{55}} = 25.000$$

Por tanto

$$R = 25.000\,\frac{D_{55}}{N_{55}} = 25.000\,\frac{193.941}{2.754.769} = \$1760{,}05$$

3. M recibe $10.000 de un fondo de retiro al cumplir 57 años de edad. ¿Qué pago anual recibirá si utiliza dicha cantidad en la compra de, (*a*) una anualidad ordinaria vitalicia? (*b*) una anualidad vitalicia cuyo primer pago vence a los 65 años de edad?

Designemos con R el pago anual requerido.

(*a*) Utilizando (1), $a_x = \dfrac{N_{x+1}}{D_x}$, tenemos $R\,a_{57} = R\,\dfrac{N_{58}}{D_{57}} = 10.000$. Por lo cual

$$R = 10.000\,\frac{D_{57}}{N_{58}} = 10.000\,\frac{177.754}{2.197.265} = \$808{,}98$$

(*b*) Utilizando (3), $\quad {}_{k|}a_x = \dfrac{N_{x+k+1}}{D_x}$, con $k = 7$,

ó (4) $\quad {}_{k|}\ddot{a}_x = \dfrac{N_{x+k}}{D_x}$, con $k = 8$,

tenemos $\quad R\,\dfrac{N_{65}}{D_{57}} = 10.000$

de donde

$$R = 10.000\,\frac{D_{57}}{N_{65}} = 10.000\,\frac{177.754}{1.172.130} = \$1516{,}50$$

4. Hallar la prima neta única de una anualidad temporal anticipada a 10 años, de $3000, anuales, para una persona de 18 años.

Utilizando (6), $\ddot{a}_{\overline{x:n}|} = \dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$, tenemos

$$3000\,\ddot{a}_{\overline{18:10}|} = 3000\,\frac{N_{18}-N_{28}}{D_{18}} = 3000\,\frac{16.953.726-11.513.853}{612.917} = \$26.626{,}15$$

5. M, cuya edad es 25 años, planea retirarse a los 55 años de edad con una renta anual de $3000, venciendo el primer pago al cumplir 55 años. Compra una anualidad acordando hacer pagos anuales iguales, el primero el día de hoy y el último al cumplir 54 años. Hallar el pago anual requerido R para adquirir la anualidad.

A los 25 años, M compra una anualidad vitalicia anticipada de $3000 anuales diferida por 30 años cuyo valor presente es $3000\,{}_{30|}\ddot{a}_{25}$. Los pagos que tiene que hacer forman una anualidad contingente temporal anticipada a 30 años cuyo valor presente es $R\,\ddot{a}_{\overline{25:30}|}$. Por tanto

$$R\,\ddot{a}_{\overline{25:30}|} = 3000\,{}_{30|}\ddot{a}_{25} \quad \text{o sea} \quad R\,\frac{N_{25}-N_{55}}{D_{25}} = 3000\,\frac{N_{55}}{D_{25}}$$

y

$$R = 3000\,\frac{N_{55}}{N_{25}-N_{55}} = 3000\,\frac{2.754.769}{12.992.619-2.754.769} = \$807{,}23$$

6. B, cuya edad actual es 25 años, paga el día de hoy $150 en un fondo de retiro y pagará $150 anuales hasta los 60 años inclusive. Principiando a los 65 años, B recibirá una pensión anual vitalicia de R. Hallar R.

A los 25 años, los pagos que hará B forman una anualidad temporal anticipada de 36 años, con valor presente de $150\,\ddot{a}_{\overline{25:36}|}$ mientras que la pensión forma una anualidad vitalicia anticipada de R anuales diferida por 40 años, con valor presente $R\,{}_{40|}\ddot{a}_{25}$.

Haciendo $R\,{}_{40|}\ddot{a}_{25} = 150\,\ddot{a}_{\overline{25:36}|}$, tenemos

$$R\,\frac{N_{65}}{D_{25}} = 150\,\frac{N_{25}-N_{61}}{D_{25}}$$

$$R = 150\,\frac{N_{25}-N_{61}}{N_{65}} = 150\,\frac{12.992.619-1.711.567}{1.172.130} = \$1443{,}66$$

7. A los 31 años de edad, M toma una póliza de seguro de vida acordando pagar primas de $56,25 al principio de cada año, por toda la vida. Hallar el valor presente de las primas.

El pago de las primas constituye una anualidad vitalicia anticipada a los 31 años de edad, de $56,25 anuales. Por tanto, el valor presente es

$$56{,}25\,\frac{N_{31}}{D_{31}} = 56{,}25\,\frac{10.153.480}{428.518} = \$1332{,}8'$$

8. ¿Cuál debe ser el importe de la prima anual de la póliza del problema 7, si M acuerda pagar 20 primas?

Designemos con R la prima anual requerida. En este caso, los pagos de las primas forman una anualidad contingente temporal anticipada a los 31 años de edad, cuyo valor presente es

$$R\,\frac{N_{31}-N_{51}}{D_{31}} \;=\; 56{,}25\,\frac{N_{31}}{D_{31}}$$

de donde

$$R \;=\; 56{,}25\,\frac{N_{31}}{N_{31}-N_{51}} \;=\; 56{,}25\,\frac{10.153.480}{10.153.480-3.613.563} \;=\; \$87{,}33$$

9. A los 65 años de edad, M tiene la opción, (a) de recibir $25.000 de una compañía de seguros, invertirlos al $2\frac{1}{2}\%$ y recibir cantidades iguales al principio de cada año, durante 20 años, al término de los cuales el fondo estará exhausto, o (b) dejar el dinero en la compañía y recibir cantidades iguales al principio de cada año, durante 20 años, mientras esté vivo. Hallar el pago anual en cada caso. Si M muere justamente antes de alcanzar los 80 años, ¿cuánto recibirán sus beneficiarios en cada caso?

Designemos con R la renta anual.

(a) En este caso, los pagos anuales forman una anualidad cierta anticipada a 20 años, de donde

$$R + R\,a_{\overline{19}|.025} \;=\; 25.000$$

y

$$R \;=\; \frac{25.000}{1+a_{\overline{19}|.025}} \;=\; \frac{25.000}{15{,}9788913} \;=\; \$1564{,}56$$

En la fecha en que M hubiera alcanzado los 80 años, sus beneficiarios recibirían el valor presente A de los 5 pagos no cubiertos. Puesto que forman una anualidad anticipada cierta, a 5 años, tenemos que

$$A \;=\; 1564{,}56\,(1+a_{\overline{4}|.025}) \;=\; 1564{,}56(4{,}761974) \;=\; \$7450{,}93$$

(b) A los 65 años, los pagos anuales forman una anualidad contingente temporal anticipada a 20 años, de donde,

$$R\,\ddot{a}_{65:\overline{20|}} \;=\; R\,\frac{N_{65}-N_{85}}{D_{65}} \;=\; 25.000$$

Por lo cual

$$R \;=\; 25.000\,\frac{D_{65}}{N_{65}-N_{85}} \;=\; 25.000\,\frac{116.088}{1.172.130-37.486} \;=\; \$2557{,}82$$

En este caso, a la muerte de M los beneficiarios no recibirían ni un centavo.

10. M, a los 55 años de edad compra una anualidad vitalicia ordinaria de $2500 anuales. El contrato estipula el pago cierto durante 15 años y posteriormente mientras esté con vida. Hallar la prima neta única.

A los 55 años de edad, M compra una anualidad cierta ordinaria de 15 pagos de $2500 cada uno, más una anualidad vitalicia ordinaria de $2500 anuales diferida por 15 años. La prima neta única es

$$\begin{aligned} 2500\,a_{\overline{15}|.025} + 2500\;{}_{15|}a_{55} \;&=\; 2500(12{,}381378) + 2500\,\frac{583.035}{193.941} \\ &=\; 30.953{,}44 + 7.515{,}62 \\ &=\; \$38.469{,}06 \end{aligned}$$

Problemas propuestos

11. Hallar la prima neta única de una anualidad vitalicia ordinaria de $1000 anuales, para una persona que tiene, (a) 25 años, (b) 40 años, (c) 55 años. *Resp.* (a) $24.647,01; ($b$) $19.391,79; ($c$) $13.204,16

12. Hallar la prima neta única de una anualidad vitalicia anticipada de $1000 anuales para una persona que tiene, (a) 28 años, (b) 43 años, (c) 57 años. *Resp.* (a) $24.696,66; ($b$) $19.204,52; ($c$) $13.361,27

13. Hallar la prima neta única de una anualidad vitalicia de $1000 anuales para una persona que ahora tiene, (a) 38 años, (b) 54 años; haciéndose el primer pago cuando tenga 65 años. *Resp.* (a) $3353,09; ($b$) $5798,17

14. A los 65 años de edad, M paga $30.000 por una anualidad vitalicia ordinaria. ¿Qué pago anual se estipula? *Resp.* $3297,82

15. Hallar el pago anual en el problema 14, si M compra una anualidad vitalicia anticipada. *Resp.* $2971,21

16. A los 54 años de edad, M paga $50.000 por una anualidad vitalicia cuyo primer pago tiene que hacerse a los 65 años de edad. ¿Qué pago anual se estipula? *Resp.* $8623,40

17. Suponiendo intereses al $2\frac{1}{2}\%$ efectivo, hallar el valor presente de una anualidad anticipada cierta, de $3000 anuales durante 10 años. Comparar el resultado con el del problema 4.

18. Hallar la prima neta única de una anualidad ordinaria temporal de $1000 anuales durante 25 años, para una persona de 50 años. *Resp.* $14.150,82

19. Hallar la prima neta única de una anualidad contingente temporal a 15 años, de $1000 anuales para una persona que ahora tiene 45 años, si el primer pago vence a los 65 años. *Resp.* $3718,27

20. M desea comprar una anualidad contingente temporal anticipada a 10 años, de $1000 anuales para su padre que ahora tiene 70 años. Hallar la prima neta única. *Resp.* $6630,21

21. ¿Qué renta anual proporcionará una anualidad temporal ordinaria a 15 años, si fue adquirida en $20.000,00 por una persona que ahora tiene 60 años? *Resp.* $2144,69

22. M, que ahora tiene 30 años, compra una anualidad de $2500 anuales, estipulándose el primer pago al cumplir 65 años de edad. Tiene que hacer pagos anuales iguales por esta anualidad, el primero inmediatamente y el último al cumplir 64 años. ¿Qué pago anual tiene que hacer? *Resp.* $311,00

23. A los 45 años M compra una póliza que estipula el pago de una anualidad cierta a 15 años de $3000 anuales, haciéndose el primer pago a los 65 años y posteriormente una anualidad vitalicia ordinaria de $3000 anuales. Hallar, ($a$) la prima neta única, y (b) la prima neta anual si tienen que hacerse 20 pagos. *Resp.* $24.609,81, ($b$) $1731,00

24. M, cuya edad es 35 años, compra una anualidad contingente temporal a 15 años de $2000 anuales, siendo el primer pago a los 65 años. (a) Hallar la prima neta única. (b) Hallar la prima neta anual si tienen que hacerse 30 pagos iguales.

Resp. (a) $2000\,\dfrac{N_{65}-N_{80}}{D_{35}} = \$5463{,}37$, ($b$) $284,40

Capítulo 17

Seguro de vida

UNA POLIZA DE SEGURO DE VIDA es un contrato entre una compañía de seguros y una persona (el asegurado). En este contrato:

(*a*) el asegurado acuerda hacer uno o más pagos (pagos de primas) a la compañía,

(*b*) la compañía promete pagar, al recibo de pruebas de la muerte del asegurado, una suma fija, a una o más personas (beneficiarios) designados por el asegurado.

Los principales tipos de seguro de vida son

(i) *Seguro de vida entera* en el cual, la compañía promete pagar el valor nominal de la póliza al beneficiario a la muerte del asegurado, cuando sea que ésta ocurra.

(ii) *Seguro temporal a n-años* en el cual, la compañía promete pagar el valor nominal de la póliza al beneficiario, a la muerte del asegurado, únicamente si el asegurado muere dentro de los n años siguientes a la emisión de la póliza.

(iii) *Seguro dotal a n-años* en el cual la compañía promete pagar el valor nominal de la póliza al beneficiario, a la muerte del asegurado, si el asegurado muere dentro de los n años siguientes a la emisión de la póliza y pagar el valor nominal de la póliza al asegurado al término de n años, si sobrevive el período.

En la práctica los beneficios se pagan tan pronto se demuestre la muerte del asegurado, sin embargo, para simplificar los cálculos necesarios supondremos que los beneficios de cualquier póliza serán pagados al final del año póliza en el que el asegurado muere. Como en el caso de las anualidades contingentes, únicamente consideraremos aquí primas netas.

SEGURO DE VIDA ENTERA. Designemos con A_x la prima neta única de una póliza de seguro de vida entera de 1, emitida para una persona de edad x. El problema de hallar A_x puede reducirse al problema de hallar la cantidad con la que cada una de las l_x personas, todas de edad x, deben contribuir para constituir un fondo suficiente que permita a la compañía pagar al beneficiario de cada asegurado, la cantidad de 1 al final del año en que el asegurado muere. La contribución total al fondo es $l_x A_x$. Durante el primer año, d_x de los asegurados morirán de acuerdo con la tabla de mortalidad y debe pagarse d_x de beneficio al final del año. El valor presente de estos beneficios es $(1+i)^{-1}d_x = vd_x$. Durante el segundo año, d_{x+1} personas morirán y el valor presente de los beneficios pagaderos al final del año es $v^2 d_{x+1}$, y así sucesivamente.
Por tanto

$$l_x A_x = vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \cdots \text{ hasta el final de la tabla}$$

y

$$A_x = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \cdots \text{ hasta el final de la tabla}}{l_x}$$

Multiplicando numerador y denominador por v^x, tenemos

$$A_x = \frac{v^{x+1}d_x + v^{x+2}d_{x+1} + v^{x+3}d_{x+2} + \cdots + v^{100}d_{99}}{v^x l_x}$$

En términos de los valores conmutativos

$$D_x = v^x l_x \qquad C_x = v^{x+1}d_x \qquad M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{99}$$

tenemos

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{99}}{D_x}$$

y finalmente

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \tag{1}$$

Los valores de M_x al $2\frac{1}{2}\%$ se encuentran en la última columna de la tabla XV.

Ejemplo 1.

Hallar la prima neta única de una póliza de seguro de vida entera de \$1000, expedida para una persona de 22 años de edad.

Utilizando (*1*), $1000\,A_{22} = 1000\dfrac{M_{22}}{D_{22}} = 1000\dfrac{193.897}{549.956} = \$352{,}57.$

Rara vez se venden pólizas de seguro a prima única. En su lugar, se pagan primas iguales al principio de cada año, ya sea, (*a*) durante toda la duración de la póliza, o (*b*) durante los primeros m años de vida de la póliza. Para el seguro de vida entera estos tipos de pagos anuales de primas se indican con la denominación de, (*a*) seguro *ordinario* de vida, o (*b*) seguro de vida *pagos limitados a m años.*

Designemos con P_x la prima neta anual de una póliza de seguro ordinario de vida de 1 emitida para una persona de edad x. Puesto que los pagos de primas forman una anualidad vitalicia anticipada de P_x por año, tenemos (véase la fórmula (*2*), capítulo 16)

$$P_x \ddot{a}_x = A_x$$

por lo cual

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x/D_x}{N_x/D_x}$$

y

$$P_x = \frac{M_x}{N_x} \tag{2}$$

Ejemplo 2.

Hallar la prima neta anual de una póliza de seguro ordinario de vida de \$1000 para una persona de 22 años de edad.

Utilizando (*2*), $1000\,P_{22} = 1000\dfrac{M_{22}}{N_{22}} = 1000\dfrac{193.897}{14.598.430} = \$13{,}28.$

Designemos con ${}_mP_x$ la prima neta anual de una póliza de seguro de vida pagos limitados a m años de 1, para una persona de edad x. Puesto que los pagos de primas forman una anualidad contingente temporal anticipada a m años, tenemos (véase la fórmula (*5*), capítulo 16)

$${}_mP_x \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = A_x$$

Por lo cual

$${}_mP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{M_x/D_x}{(N_x - N_{x+m})/D_x}$$

y

$${}_mP_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} \tag{3}$$

Ejemplo 3.

Hallar la prima neta anual de una póliza de seguro de vida pagos limitados a 10 años de $1000 para una persona de 22 años de edad.

Utilizando (*3*), $1000\ {}_{10}P_{22} \;=\; 1000\,\dfrac{M_{22}}{N_{22}-N_{32}} \;=\; 1000\,\dfrac{193.897}{14.598.430-9,724.962} \;=\; \$39{,}79.$

Véanse los problemas 1-4.

SEGURO TEMPORAL. Designemos con $A^1_{x:\overline{n}|}$ la prima neta única de una póliza de seguro temporal a n años de 1, para una persona de edad x. Procediendo en la misma forma que para el caso de A_x, encontramos que

$$l_x A^1_{x:\overline{n}|} \;=\; vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \cdots + v^n d_{x+n-1}$$

ya que el último beneficio se paga al término de n años.

Por tanto

$$A^1_{x:\overline{n}|} \;=\; \frac{v^{x+1}d_x + v^{x+2}d_{x+1} + v^{x+3}d_{x+2} + \cdots + v^{x+n}d_{x+n-1}}{v^x l_x}$$

$$= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{x+n-1}}{D_x}$$

$$= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{99}}{D_x} - \frac{C_{x+n} + C_{x+n+1} + C_{x+n+2} + \cdots + C_{99}}{D_x}$$

y

$$A^1_{x:\overline{n}|} \;=\; \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \tag{4}$$

Ejemplo 4.

Hallar la prima neta única de una póliza de seguro temporal a 10 años, de $1000, para una persona de 30 años.

Utilizando (*4*), $1000\,A^1_{30:\overline{10}|} \;=\; 1000\,\dfrac{M_{30}-M_{40}}{D_{30}} \;=\; 1000\,\dfrac{182.403-165.360}{440.801} \;=\; \$38{,}66.$

Designemos con $P^1_{x:\overline{n}|}$ la prima neta anual para una póliza de seguro temporal a n años de 1, para una persona de edad x. Puesto que las primas anuales forman una anualidad contingente temporal anticipada a n años, tenemos

$$P^1_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \;=\; A^1_{x:\overline{n}|}$$

$$P^1_{x:\overline{n}|} \;=\; \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \;=\; \frac{(M_x - M_{x+n})/D_x}{(N_x - N_{x+n})/D_x}$$

y finalmente

$$P^1_{x:\overline{n}|} \;=\; \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{5}$$

Ejemplo 5.

Hallar la prima neta anual de una póliza de seguro temporal a 10 años de $1000, para una persona de 30 años.

Utilizando (*5*), $1000\,P^1_{30:\overline{10}|} \;=\; 1000\,\dfrac{M_{30}-M_{40}}{N_{30}-N_{40}} \;=\; 1000\,\dfrac{182.403-165.360}{10.594.280-6.708.573} \;=\; \$4{,}39$

Designemos con ${}_mP^1_{x:\overline{n}|}$ la prima neta anual de una póliza de seguro temporal a n años de 1, para una persona de edad x, para ser pagada durante un período de $m < n$ años, esto es, una póliza temporal a n años con pagos limitados a m años de 1, para una persona de edad x. Es decir

$$_mP^1_{x:\overline{n}|} \;=\; \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \tag{6}$$

Ejemplo 6.

Hallar la prima neta anual de una póliza de seguro temporal a 20 años, con pagos limitados a 15 años, de $1000, para una persona de 30 años de edad.

Utilizando (*6*) con $m = 15$ y $n = 20$,

$$1000\ {}_{15}P^1_{30:\overline{20}|} \;=\; 1000\,\frac{M_{30}-M_{50}}{N_{30}-N_{45}} \;=\; 1000\,\frac{182.403-142.035}{10.594.280-5.161.996} \;=\; \$7{,}43$$

Véanse los problemas 5-7.

SEGURO DOTAL. Una póliza de seguro dotal a n años combina los beneficios de un seguro temporal a n años y un dotal puro al término de n años. Designemos con $A_{x:\overline{n}|}$ la prima neta única de una póliza de seguro dotal a n años de 1, para una persona de edad x. Tenemos que

$$A_{x:\overline{n}|} \;=\; A^1_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \;=\; \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

y

$$A_{x:\overline{n}|} \;=\; \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \tag{7}$$

Ejemplo 7.

Hallar la prima neta única de una póliza de seguro dotal a 25 años, por $1000, para una persona de 40 años de edad.

Utilizando (*7*),

$$1000\,A_{40:\overline{25}|} \;=\; 1000\,\frac{M_{40}-M_{65}+D_{65}}{D_{40}} \;=\; 1000\,\frac{165.360-87.500+116.088}{328.984} \;=\; \$589{,}54.$$

Designemos con $P_{x:\overline{n}|}$ la prima neta anual de una póliza de seguro dotal a n años de 1, para una persona de edad x. Tenemos que

$$P_{x:\overline{n}|} \;=\; \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{8}$$

Ejemplo 8.

Hallar la prima neta anual de una póliza de seguro dotal a 25 años por $1000, para una persona de 40 años de edad.

Utilizando (*8*), $1000\,P_{40:\overline{25}|} \;=\; 1000\,\dfrac{M_{40}-M_{65}+D_{65}}{N_{40}-N_{65}} \;=\; 1000\,\dfrac{193.948}{6.708.573-1.172.130} \;=\; \$35{,}03.$

Designemos con ${}_mP_{x:\overline{n}|}$ la prima neta anual de una póliza de seguro dotal a n años con pagos limitados a m años, para una persona de edad x. Tenemos que

$$_mP_{x:\overline{n}|} \;=\; \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \tag{9}$$

Ejemplo 9.

Hallar la prima neta anual de una póliza de seguro dotal a 25 años con pagos limitados a 20 años, por $1000, para una persona de 40 años de edad.

Utilizando (*9*), con $m = 20$ y $n = 25$,

$$1000\ {}_{20}P_{40:\overline{25}|} \;=\; 1000\,\frac{M_{40}-M_{65}+D_{65}}{N_{40}-N_{60}} \;=\; 1000\,\frac{193.948}{6.708.573-1.865.614} \;=\; \$40{,}05$$

Véanse los problemas 8-9.

PRIMA NATURAL. La prima neta única de un seguro temporal a 1 año, a la edad x, se conoce como *prima natural* a dicha edad. De (*5*) tenemos que la prima natural para una póliza de 1, a la edad x es

$$P^{1}_{x:\overline{1|}} \;=\; \frac{M_x - M_{x+1}}{N_x - N_{x+1}} \;=\; \frac{M_x - M_{x+1}}{D_x} \qquad (10)$$

Ejemplo 10.

Hallar la prima natural de una póliza de \$1000 a los, (*a*) 22 años de edad, (*b*) 23, (*c*) 75.

Utilizando (*10*),

$$(a)\quad 1000\,P^{1}_{22:\overline{1|}} \;=\; 1000\,\frac{M_{22} - M_{23}}{D_{22}} \;=\; 1000\,\frac{193.897 - 192.507}{549.956} \;=\; \$2.53$$

$$(b)\quad 1000\,P^{1}_{23:\overline{1|}} \;=\; 1000\,\frac{M_{23} - M_{24}}{D_{23}} \;=\; 1000\,\frac{192.507 - 191.108}{535.153} \;=\; \$2,61$$

$$(c)\quad 1000\,P^{1}_{75:\overline{1|}} \;=\; 1000\,\frac{M_{75} - M_{76}}{D_{75}} \;=\; 1000\,\frac{41.670 - 37.382}{49.588} \;=\; \$86.47$$

Véase el problema 10.

RESERVAS. Considérese una póliza de seguro ordinario de vida de \$1000 para una persona de 22 años de edad. En la tabla que sigue se compara la prima neta anual de esta póliza (véase el ejemplo 2) con la prima natural a diferentes edades del seguro (véase el ejemplo 10).

Edad	Prima neta anual a los 22 años de edad	Prima natural
22	13.28	2.53
23	13,28	2.61
40	13,28	6.03
51	13,28	12.95
52	13,28	13,95
75	13.28	86.47
85	13,28	189,38

Vemos que en los primeros años de la póliza el asegurado paga a la compañía más que el costo anual del seguro, 13,28 — 2,53 = \$10,75 el primer año y 13,28 — 2,61 = \$10,67 el segundo año. Cada sobrante de la prima anual sobre el costo del seguro en el año es colocada por la compañía en un *fondo de reserva,* el cual gana intereses a la misma tasa que se utilizó al calcular la prima. A los 52 años de edad, el costo de un año de seguro por primera vez excede el pago anual de prima. Principiando a los 52 años de edad y continuando cada año en adelante mientras la póliza se encuentre en vigor, la compañía toma del fondo de reserva la cantidad necesaria para cubrir la diferencia, 13,95 — 13,28 = \$0,67 a los 52 años y 86,47 — 13,28 = \$73,19 a los 75 años. El fondo de reserva para cada póliza crece durante toda la vida de la póliza. De acuerdo con la tabla CSO utilizada, la reserva a los 99 años de edad debería ser $1000v$ = \$975,61, esto es, la prima neta única de una póliza de vida entera por \$1000 a los 99 años.

El fondo de reserva al final de cualquier año póliza se conoce como *reserva terminal* del año póliza. La reserva terminal menos un cargo nominal para gastos se conoce como *valor de rescate de la póliza.* La reserva terminal pertenece al asegurado mientras la póliza esté en vigor. El asegurado en cualquier momento puede solicitar como préstamo el valor de rescate de su póliza sin más garantía. También puede cancelar su póliza y tomar el valor de rescate en efectivo o aplicarlo a la compra de otra póliza de seguro.

La reserva terminal al final de cualquier año póliza, puede ser calculada con una ecuación de valor tomando el final del año póliza como fecha focal:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Reserva terminal al}\\ \text{final del } r\text{-ésimo año póliza}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{Valor presente de}\\ \text{todas las primas futuras}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{Valor presente de}\\ \text{todos los beneficios futuros}\end{matrix}\right\} \qquad (11)$$

Por ejemplo, designemos con $_rV$ la reserva terminal al final del r-ésimo año de una póliza de seguro ordinario de vida de 1, para una persona de edad x. Después de r años póliza, el valor presente de todas las primas futuras será el valor presente $P_x \cdot \ddot{a}_{x+r}$ de una anualidad vitalicia anticipada de P_x por año, a la edad $x + r$ y el valor presente de los beneficios futuros será la prima neta única A_{x+r} de una póliza de seguro de vida entera de 1, a la edad $x + r$. Por lo cual

$$_rV \;+\; P_x \cdot \ddot{a}_{x+r} \;=\; A_{x+r}$$

y

$$_rV \;=\; A_{x+r} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+r} \;=\; \frac{M_{x+r}}{D_{x+r}} - \frac{M_x}{N_x}\cdot\frac{N_{x+r}}{D_{x+r}}$$

Ejemplo 11.

Hallar la reserva terminal al final del 10o. año póliza, de una póliza de seguro ordinario de vida de \$1000, para una persona de 22 años.

Del ejemplo 2, tenemos que la prima neta anual a los 22 años de edad es \$13,28. Al final del 10o. año póliza, el valor presente de las primas faltantes es 13,28 $\ddot{a}_{32}$ y el valor presente de los beneficios futuros es 1000 A_{32}. Por tanto

$$1000\;{}_{10}V \;=\; 1000\,A_{32} \;-\; 13{,}28\;\ddot{a}_{32} \;=\; 1000\,\frac{M_{32}}{D_{32}} - 13{,}28\,\frac{N_{32}}{D_{32}}$$

$$=\; \frac{1000\,M_{32} \;-\; 13{,}28\,N_{32}}{D_{32}} \;=\; \frac{50.165.505}{416.507} \;=\; \$120{,}44$$

Véanse los problemas 11-14.

Problemas resueltos

1. Hallar la prima neta única de una póliza de seguro de vida entera de \$1000 para una persona de 30 años de edad.

Utilizando (*1*),
$$A_x \;=\; \frac{M_x}{D_x}$$

$$1000\,A_{30} \;=\; 1000\,\frac{M_{30}}{D_{30}} \;=\; 1000\,\frac{182.403}{440.801} \;=\; \$413{,}80$$

2. Hallar la prima neta anual de una póliza de seguro ordinario de vida de \$1000 para una persona de 30 años.

Utilizando (*2*),
$$P_x \;=\; \frac{M_x}{N_x}$$

$$1000\,P_{30} \;=\; 1000\,\frac{M_{30}}{N_{30}} \;=\; 1000\,\frac{182.403}{10.594.280} \;=\; \$17{,}22$$

3. Hallar la prima neta anual de una póliza de seguro de vida pagos limitados a 20 años, de \$1000, para una persona de 30 años.

Utilizando (*3*),
$$_mP_x \;=\; \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}}$$

$$1000\;{}_{20}P_{30} \;=\; 1000\,\frac{M_{30}}{N_{30} - N_{50}} \;=\; 1000\,\frac{182.403}{10.594.280 - 3.849.488} \;=\; \$27{,}04$$

4. A los 25 años de edad, M hereda \$2000. ¿Cuánto seguro de vida entera puede comprar utilizando la cantidad completa como prima neta única?

Designemos con I el valor nominal de la póliza adquirida; tenemos que

$$I \cdot A_{25} \;=\; I\,\frac{M_{25}}{D_{25}} \;=\; 2000 \qquad \text{y} \qquad I \;=\; 2000\,\frac{D_{25}}{M_{25}} \;=\; 2000\,\frac{506.594}{189.701} \;=\; \$5340{,}97$$

5. Hallar la prima neta única de una póliza de seguro temporal a 30 años, de \$1000, para una persona de 30 años.

Utilizando (4),
$$A^{1}_{x:\overline{n}|} \;=\; \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$1000\,A^{1}_{30:\overline{30}|} \;=\; 1000\,\frac{M_{30}-M_{60}}{D_{30}} \;=\; 1000\,\frac{73.860}{440.801} \;=\; \$167{,}56$$

6. Hallar la prima neta anual de, (*a*) una póliza de seguro temporal a 30 años por \$1000, para una persona de 30 años, (*b*) una póliza de seguro temporal a 30 años, con pagos limitados a 20 años, por \$1000, para una persona de 35 años.

(*a*) Utilizando (5),
$$P^{1}_{x:\overline{n}|} \;=\; \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$1000\,P^{1}_{30:\overline{30}|} \;=\; 1000\,\frac{M_{30}-M_{60}}{N_{30}-N_{60}} \;=\; 1000\,\frac{73.860}{8.728.666} \;=\; \$8{,}46$$

(*b*) Utilizando (6),
$${}_{m}P^{1}_{x:\overline{n}|} \;=\; \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$1000\,{}_{20}P^{1}_{35:\overline{30}|} \;=\; 1000\,\frac{M_{35}-M_{65}}{N_{35}-N_{55}} \;=\; 1000\,\frac{86.924}{5.755.674} \;=\; \$15{,}10$$

7. Hallar la prima neta única de una póliza de seguro para una persona de 25 años, la cual estipula el pago de \$10.000 a los beneficiarios si el asegurado muere dentro de 10 años y \$5000 si sobrevive dicho período pero muere dentro de los siguientes 10 años.

La póliza puede considerarse como un seguro temporal a 20 años por \$5000 más un seguro temporal a 10 años por \$5000, expedidos ambos a los 25 años. La prima neta única es

$$5000\,A^{1}_{25:\overline{20}|} + 5000\,A^{1}_{25:\overline{10}|} \;=\; 5000\left\{\frac{M_{25}-M_{45}}{D_{25}} + \frac{M_{25}-M_{35}}{D_{25}}\right\}$$

$$=\; 5000\,\frac{2\,M_{25}-M_{45}-M_{35}}{D_{25}} \;=\; 5000\,\frac{50.241}{506.594} \;=\; \$495{,}87$$

8. Hallar la prima neta única de una póliza de seguro dotal a 35 años, por \$1000, para una persona de 30 años.

Utilizando (7),
$$A_{x:\overline{n}|} \;=\; \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$1000\,A_{30:\overline{35}|} \;=\; 1000\,\frac{M_{30}-M_{65}+D_{65}}{D_{30}} \;=\; 1000\,\frac{210.991}{440.801} \;=\; \$478{,}65$$

9. Para la póliza del problema 8, hallar, (*a*) la prima neta anual, (*b*) la prima neta anual si se estipulan 20 pagos.

(*a*) Utilizando (8),
$$P_{x:\overline{n}|} \;=\; \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$1000\,P_{30:\overline{35}|} \;=\; 1000\,\frac{M_{30}-M_{65}+D_{65}}{N_{30}-N_{65}} \;=\; 1000\,\frac{210.991}{9.422.150} \;=\; \$22{,}39$$

(*b*) Utilizando (9),
$${}_{m}P_{x:\overline{n}|} \;=\; \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$1000\,{}_{20}P_{30:\overline{35}|} \;=\; 1000\,\frac{M_{30}-M_{65}+D_{65}}{N_{30}-N_{50}} \;=\; 1000\,\frac{210.991}{6.744.792} \;=\; \$31{,}28$$

10. Hallar la prima natural de una póliza de seguro de \$1000 expedida a los, (*a*) 51 años de edad, (*b*) 52 años de edad.

Utilizando (10),
$$P^{1}_{x:\overline{1}|} \;=\; \frac{M_x - M_{x+1}}{D_x}$$

(*a*)
$$1000\,P^{1}_{51:\overline{1}|} \;=\; 1000\,\frac{M_{51}-M_{52}}{D_{51}} \;=\; 1000\,\frac{2943}{227.335} \;=\; \$12{,}95$$

(*b*)
$$1000\,P^{1}_{52:\overline{1}|} \;=\; 1000\,\frac{M_{52}-M_{53}}{D_{52}} \;=\; 1000\,\frac{3053}{218.847} \;=\; \$13{,}95$$

11. Hallar la reserva terminal al final del 15o. año póliza, de una póliza de seguro ordinario de vida de \$1000, expedida para una persona de 30 años de edad.

Del problema 2 tenemos que la prima neta anual a los 30 años de edad es \$17,22. Al final del 15o. año póliza, el valor presente de las primas restantes está dado por 17,22 $\ddot{a}_{45}$ (valor presente de una anualidad vitalicia anticipada de \$17,22 por año, a los 45 años) y el valor presente de los beneficios restantes será la prima neta única 1000 A_{45} de una póliza de seguro ordinario de vida de \$1000, a los 45 años. Por tanto

$$1000\,{}_{15}V \;=\; 1000\,A_{45} \;-\; 17{,}22\,\ddot{a}_{45}$$

$$=\; 1000\,\frac{M_{45}}{D_{45}} \;-\; 17{,}22\,\frac{N_{45}}{D_{45}} \;=\; \frac{1000\,M_{45} \;-\; 17{,}22\,N_{45}}{D_{45}} \;=\; \frac{65.847.429}{280.639} \;=\; \$234{,}63$$

12. Hallar la reserva terminal al final del 20o. año póliza, de un seguro temporal a 30 años de \$1000, expedido para una persona de 30 años de edad.

Del problema 6 tenemos que la prima neta anual a edad 30 es \$8,46. Después de 20 años póliza, el valor presente de las primas restantes es el valor presente 8,46 $\ddot{a}_{50:\overline{10}|}$ de una anualidad temporal anticipada a 10 años, de \$8,46 por año a los 50 años de edad y el valor presente de los beneficios restantes será la prima neta única 1000 $A^{1}_{50:\overline{10}|}$ de un seguro temporal a 10 años de \$1000 a edad 50. Por tanto

$$1000\,{}_{20}V \;=\; 1000\,A^{1}_{50:\overline{10}|} \;-\; 8{,}46\,\ddot{a}_{50:\overline{10}|}$$

$$=\; 1000\,\frac{M_{50}-M_{60}}{D_{50}} \;-\; 8{,}46\,\frac{N_{50}-N_{60}}{D_{50}} \;=\; \frac{16.708.426}{235.925} \;=\; \$70{,}82$$

13. Hallar la reserva terminal al final del 15o. año de una póliza de seguro dotal a 25 años con pagos limitados a 20 años, de \$1000, expedida a los 40 años de edad.

Del ejemplo 9 tenemos que la prima neta anual a los 40 años de edad es \$40,05. Después de 15 años, el valor presente de todas las primas restantes será el valor presente 40,05 $\ddot{a}_{55:\overline{5}|}$ de una anualidad temporal anticipada a 5 años de \$40,05 anuales a los 55 años de edad y el valor presente de los beneficios futuros será la prima neta única 1000 $A_{55:\overline{10}|}$ de un seguro dotal a 10 años, a los 55 años. Por tanto

$$1000\,{}_{15}V \;=\; 1000\,A_{55:\overline{10}|} \;-\; 40{,}05\,\ddot{a}_{55:\overline{5}|}$$

$$=\; \frac{1000(M_{55}-M_{65}+D_{65}) \;-\; 40{,}05(N_{55}-N_{60})}{D_{55}} \;=\; \frac{119.728.342}{193.941} \;=\; \$617{,}34$$

14. Hallar la reserva terminal al fin del 22o. año póliza, para la póliza del problema 13.

Después de 22 años, no hay más primas por pagarse. La reserva terminal es por tanto la prima neta única de un seguro dotal a 3 años, de $1000, a los 62 años, o sea

$$_{22}V \quad = \quad 1000\,A_{\overline{62:3|}} \quad = \quad 1000\,\frac{M_{62} - M_{65} + D_{65}}{D_{62}} \quad = \quad 1000\,\frac{129.028}{138.617} \quad = \quad \$930{,}82$$

Problemas propuestos

15. Para una póliza de seguro de vida entera de $1000 expedida a los 40 años, hallar, (*a*) la prima neta única, (*b*) la prima neta anual, (*c*) la prima neta anual si se estipulan 10 pagos de primas, (*d*) la prima neta anual si se estipulan 15 pagos de primas, (*e*) la prima neta anual si se estipulan 20 pagos de primas.
Resp. (*a*) $502,64; (*b*) $24,65; (*c*) $57,84; (*d*) $41,82; (*e*) $34,14

16. Para un seguro temporal a 10 años de $1000 expedida a los 24 años, hallar, (*a*) la prima neta única, y (*b*) la prima neta anual. *Resp.* (*a*) $28,84; (*b*) $3,26

17. Para una póliza de seguro temporal a 20 años de $1000 expedida a los 30 años, hallar, (*a*) la prima neta única, y (*b*) la prima neta anual. *Resp.* (*a*) $91,58; (*b*) $5,99

18. Hallar la prima neta anual de una póliza de seguro temporal a 30 años, con pagos limitados a 20 años, por $1000, para una persona de 25 años. *Resp.* $8,04

19. Hallar la prima neta anual de una póliza de seguro temporal a 25 años con pagos limitados a 15 años, por $1000, para una persona de 30 años. *Resp.* $10,24

20. Para una póliza de seguro expedida a los 25 años, que estipula el pago de $5000 si la muerte ocurre antes de la edad 40 y $1000 en caso que la muerte ocurra después, en cualquier fecha, hallar, (*a*) la prima neta única, (*b*) la prima neta anual si se estipulan 10 pagos de primas. *Resp.* (*a*) $566,66; (*b*) $64,05

21. Para una póliza de seguro dotal a 30 años de $1000 para una persona de 35 años, hallar, (*a*) la prima neta única, (*b*) la prima neta anual, (*c*) la prima neta anual si se estipulan 20 pagos de primas. *Resp.* (*a*) $531,45, (*b*) $27,66 (*c*) $35,27

22. Para una,póliza de seguro dotal a 40 años de $1000, para una persona de 25 años, hallar, (*a*) la prima neta única, (*b*) la prima neta anual, (*c*) la prima neta anual si se estipulan 20 pagos de primas. *Resp.* (*a*) $430,90, (*b*) $18,47, (*c*) $27,88

23. A los 40 años de edad, M compra una póliza por la cual si muere antes de los 65 años, se le paga al beneficiario $10.000 y si permanece con vida recibirá una renta vitalicia de $2000 anuales, haciéndose el primer pago a los 65 años. Hallar la prima neta anual si se estipulan 20 pagos. *Resp.* $644,83

24. ¿Qué suma asegurada en plan de vida entera puede comprar una persona de 30 años con una prima neta única de $1000?
Resp. $2416,63

25. ¿Qué suma asegurada se puede comprar en una póliza de seguro ordinario de vida, a los 20 años de edad, con una prima de $25 anuales? *Resp.* $2001,48

26. ¿Qué suma asegurada se puede comprar en una póliza de seguro dotal a 25 años, a los 40 años, mediante 20 primas anuales de $100 cada una? *Resp.* $2497,04

27. Hallar la prima natural de un seguro de $1000 expedida a los, (*a*) 25 años, (*b*) 30 años, (*c*) 40 años, (*d*) 85 años.
Resp. (*a*) $2,81, (*b*) $3,47, (*c*) $6,03, (*d*) $189,38

28. Hallar la reserva terminal al término del, (*a*) 20o. año póliza, (*b*) 35o. año póliza, (*c*) 50o. año póliza, de una póliza de seguro ordinario de vida de $1000 expedida a los 40 años. (Véase el problema 15.)
Resp. (*a*) $406,08, (*b*) $678,96, (*c*) $855,32

29. Hallar la reserva terminal al final del, (*a*) 12o. año póliza, (*b*) 18o. año póliza, (*c*) 30o. año póliza, de una póliza de seguro de vida pagos limitados a 20 años, de $1000, expedida a los 40 años. (Véase el problema 15.)
Resp. (*a*) $385,39, (*b*) $617,65, (*c*) 799,41

30. Hallar la reserva terminal al final del, (*a*) 5o. año póliza, (*b*) 15o. año póliza, de un seguro temporal a 30 años con pagos limitados a 20 años, de $1000 expedida a los 25 años. (Véase el problema 18.) *Resp.* (*a*) $27,17, (*b*) $79,56

31. Hallar la reserva terminal al final del (*a*) 10o. año póliza, (*b*) del 25o. año póliza de un dotal a 30 años de $1000 expedida a los 35 años. (Véase el problema 21.) *Resp.* (*a*) $260, (*b*) $765,68

32. Hallar la reserva terminal al final del, (*a*) 5o. año póliza, (*b*) 15o. año póliza, (*c*) 25o. año póliza, de un dotal a 30 años, con pagos limitados a 20 años, de $1000 expedida a los 35 años. (Véase el problema 21.)
Resp. (*a*) $165,65; (*b*) $559,55; (*c*) $890,20

33. A los 25 años de edad, M tomó una póliza de seguro de vida pagos limitados a 20 años, por $5000. Al término de 25 años, él desea convertir su seguro a un dotal a 15 años. Suponiendo que el total de la reserva terminal será utilizado, hallar la suma asegurada de la póliza de seguro, saldado, dotal, que recibirá.
Resp. $4162,25

Problemas de revisión

1. Hallar el interés simple al 5%, (*a*) sobre un documento de \$4000, fechado el 15 de enero de 1962, con vencimiento el 28 de agosto de 1962, (*b*) sobre un documento de \$2500 a tres meses. *Resp.* (*a*) \$125, (*b*) \$31,25

2. Hallar el descuento sobre \$4000 a 150 días al, (*a*) 6% de interés simple, (*b*) 6% de descuento simple. *Resp.* (*a*) \$97,56; (*b*) \$100

3. Un documento a 90 días por \$1200, con fecha 1o. de julio, con interés al 5%, ha sido descontado el 10 de agosto en un banco cuya tasa de descuento es 6%. Hallar, (*a*) el importe de la operación, (*b*) la tasa de interés simple ganada por el banco. *Resp.* (*a*) \$1204,88; (*b*) 6,05%

4. X le debe a Y \$500 pagaderos en 9 meses. Al 4% de interés simple, ¿cuánto recibiría Y si X saldara su deuda el día de hoy? *Resp.* \$485,44

5. Para pagar una cuenta de \$1800, la compañía ABC entrega a la compañía XYZ un documento a 60 días, sin intereses, el cual es descontado en un banco que carga el 6% de descuento simple recibiendo \$1800 en efectivo. ¿Cuánto es el valor nominal del documento? *Resp.* \$1818,18

6. M recibió \$591,75 de un banco firmando un documento a 90 días por \$600. ¿Qué tasa de descuento se utilizó? *Resp.* $5\frac{1}{2}$%

7. M coloca \$4000 en una cuenta de ahorro. ¿Cuánto tendrá en la cuenta 12 años después si el banco paga, (*a*) 3% convertible trimestralmente, (*b*) 4% convertible semestralmente, (*c*) $3\frac{3}{4}$% efectivo, (*d*) 3,3% convertible trimestralmente? *Resp.* (*a*) \$5725,62, (*b*) \$6433,75, (*c*) \$6221,80, (*d*) \$5933,90

8. Una deuda de \$2250 vence al término de 6 años. Si se hace un pago de \$500 al final de dos años, ¿qué pago será necesario hacer 2 años después para saldar la deuda suponiendo un interés de 5% efectivo? *Resp.* \$1489,57

9. Hallar la tasa nominal de interés convertible trimestralmente, equivalente a, (*a*) 5% convertible mensualmente, (*b*) 4,84% convertible semestralmente? *Resp.* (*a*) 5,02%, (*b*) 4,81%

10. Una deuda de \$8000 devenga intereses al 4% convertible trimestralmente. Hallar el abono trimestral necesario si el capital va a ser pagado al término de 10 años, acumulándose un fondo de amortización invertido al 3% convertible trimestralmente. *Resp.* \$252,24

11. Una compañía obtiene un préstamo por \$750.000 para ser pagado con intereses al $5\frac{1}{2}$% efectivo en 20 pagos anuales iguales, debiendo hacerse el primero 5 años después de la fecha del préstamo. Hallar el pago anual. *Resp.* \$77.748,01

12. ¿Cuánto tiempo toma para que el monto de \$3000 sea \$3750 al 5% convertible semestralmente? *Resp.* 4,52 años.

13. Un bono de anualidad de \$7500, al 4% debe ser pagado mediante 10 pagos anuales iguales. ¿Cuánto debería pagar M por dicho bono justamente después del 4o. pago si desea tener un rendimiento de 6% efectivo? *Resp.* \$4546,96

14. Hallar la anualidad pagadera al principio de cada mes equivalente a pagos de \$10.000 al, (*a*) final de cada período de 5 años, (*b*) principio de cada período de 5 años, suponiendo intereses al 4% convertible trimestralmente. *Resp.* (*a*) \$150,38; (*b*) \$183,50

15. M obtiene un préstamo por \$3000 acordando pagarlo con intereses al 5% convertible trimestralmente, mediante pagos trimestrales de \$225 por el tiempo que sea necesario. Hallar el número de pagos completos necesarios y el importe del pago final un período posterior. *Resp.* 14; \$152,57

16. M debe a la fecha \$6000 que desea liquidar mediante, (*a*) 5 pagos semestrales iguales, el primero con vencimiento en tres años, (*b*) 5 pagos anuales, el primero con vencimiento en 3 años. Hallar el pago necesario suponiendo intereses al $4\frac{1}{2}$% convertible semestralmente. *Resp.* (*a*) \$1433,09, (*b*) \$1496,08

17. Se espera que una mina reditúe \$30.000 cada año, por los próximos 20 años. Si M desea un rendimiento de 8% sobre su inversión y tiene la posibilidad de invertir con toda seguridad al 4%, ¿cuánto es el valor actual de la mina para M si, (*a*) después de 20 años queda sin valor, (*b*) después de 20 años puede ser vendida en \$5000? *Resp.* (*a*) \$264.126,94; (*b*) \$265.605,26

18. Un bono de \$1000, al 3% con pagos de intereses el primero de febrero y el primero de agosto, es redimible a 105 el primero de febrero de 1998. Hallar el valor de compra que reditúe el 5% convertible semestralmente si se compra, (*a*) el primero de agosto de 1962, (*b*) el 20 de septiembre de 1962. *Resp.* (*a*) \$677,95; (*b*) \$682,66

19. Un bono de \$1000, $4\frac{1}{2}$%, MS, redimible a la par el primero de marzo de 1970, es cotizado a $95\frac{1}{4}$ el primero de marzo de 1960. Hallar la tasa de redituabilidad aproximada. *Resp.* $5\frac{1}{8}$%

20. Hallar el monto y el valor presente de una anualidad anticipada de \$1500 anuales por 7 años, suponiendo intereses de 4% convertible trimestralmente. *Resp.* \$12.351,12; \$9347,76

21. Establecer una cátedra en una universidad cuesta \$12.500 anuales. Hallar el valor presente del fondo necesario para establecerla suponiendo intereses de 4% convertible trimestralmente. *Resp.* \$307.851,36

22. Un activo que cuesta \$75.000 tiene una vida probable de 15 años, al término de los cuales tiene un valor de salvamento de \$12.000. Hallar el valor en libros al final del 8o. año utilizándose, (*a*) el método lineal, (*b*) el método de suma de dígitos, (*c*) el método de porcentaje constante, (*d*) el método de fondo de amortización, suponiendo intereses al 3% efectivo. *Resp.* (*a*) \$41.400; (*b*) \$26.700; (*c*) \$28.222; (*d*) \$44.879,03

23. Un huerto proporcionará la primera cosecha completa al final del 5o. año y se espera mantener un ingreso anual de \$5000 durante 20 años en total. Hallar el valor en efectivo del huerto suponiendo intereses al 5%. *Resp.* \$51.263,46

24. Un poste sin tratamiento cuesta \$2,00 y dura 15 años. ¿Cuánto debería uno estar dispuesto a pagar por un poste tratado que dura 25 años, suponiendo intereses al 5% convertible semestralmente? *Resp.* \$2,71

25. ¿Cuánto costará comprar una anualidad de \$2000 cada 6 meses por 15 años si la tasa del interés es de 6% efectivo? *Resp.* \$39.423,24

26. Una compañía financiera ofrece \$300 para ser pagados mediante 15 pagos mensuales de \$23,04 cada uno. Obtener la tasa aproximada de interés cargada, utilizando la fórmula de razón directa. *Resp.* 21,8%

27. Un bono de anualidad de \$10.000 al 4% debe ser pagado en 10 pagos iguales. ¿Cuánto debe pagarse por él justamente después del 3er. pago, para obtener un rendimiento de 6%? *Resp.* \$6882,57

28. Principiando al cumplir 41 años y terminando al cumplir 65, M depositó \$500 anuales en un fondo que paga el $3\frac{1}{2}$% efectivo. ¿Cuánto hay en el fondo en su 65o. cumpleaños? *Resp.* \$19.474,93

29. Un documento a 6 meses por \$400, con intereses al 5%, es vendido a M 80 días antes de su vencimiento, el cual espera ganar 6% en su inversión. Hallar el importe de la operación. *Resp.* \$404,61

30. Remplazar pagos de \$1000 al final de cada año por pagos iguales al final de cada mes suponiendo (*a*) intereses al 6% convertible mensualmente, (*b*) intereses al 6% convertible anualmente. *Resp.* (*a*) \$81,07; (*b*) \$81,13

31. El día de hoy se depositan \$7500 en un fondo que gana el 4% convertible semestralmente. Se tiene planeado agotar totalmente el fondo mediante 10 retiros semestrales iguales de valor X, haciéndose el primero al término de 5 años a partir de la fecha. Hallar X. *Resp.* \$997,85

32. Una deuda de \$10.000 que devenga intereses al 6% convertible semestralmente está amortizándose mediante pagos trimestrales de \$1000 cada uno. (*a*) Hallar el saldo insoluto justamente después del 8o. pago. (*b*) ¿Cuántos pagos completos y qué pago parcial un período después, saldará totalmente el adeudo?
Resp. (*a*) \$2832,09; (*b*) 10; \$916,23

33. Un bono de \$1000, 6%, EJ, será redimido a la par el primero de julio de 1980 teniendo como fecha opcional de redención el primero de julio de 1970 o cualquier fecha de pago de interés posterior. Hallar el precio de compra al primero de julio de 1963 si se desea ganar por lo menos, (*a*) el 8% convertible semestralmente, (*b*) el 8% convertible trimestralmente, (*c*) el 4% convertible semestralmente, (*d*) el 5% efectivo.
Resp. (*a*) \$815,89; (*b*) \$809,48; (*c*) \$1121,06; (*d*) \$1062,15

34. Hace 8 años se hizo una inversión de \$1000, y actualmente el valor de la inversión es \$1425,10. ¿Qué tasa nominal convertible trimestralmente se obtuvo como rendimiento? *Resp.* 4,44%

35. Una deuda de \$4000 con intereses al 5% convertible semestralmente será saldada mediante pagos anuales de \$500. Hallar el número de pagos completos y el pago final necesario. *Resp.* 10; \$259,61

36. M desea depositar en un fondo que gana el 3% convertible trimestralmente, una cantidad suficiente que le permita hacer retiros trimestrales de \$1000, cada uno, el primero al término de 5 años y el último al término de 10 años. Hallar el depósito necesario. *Resp.* \$16.800,11

37. M consigue \$192 y firma un documento sin intereses, a 120 días por \$200. ¿Qué tasa, (*a*) de descuento simple, (*b*) de interés simple se le está cargando? *Resp.* (*a*) 12%, (*b*) $12\frac{1}{2}$%

38. M debe \$3000 con vencimiento en tres años. Suponiendo intereses de 3% efectivo, ¿de cuánto deben ser los pagos iguales hechos, (*a*) 1, 2 y 3 años a partir de hoy? (*b*) 1 y 3 años a partir de hoy que saldarán la deuda?
Resp. (*a*) \$970,59; (*b*) \$1455,67

39. Hallar la tasa nominal convertible mensualmente equivalente al, (*a*) $5\frac{1}{2}$% efectivo, (*b*) $5\frac{1}{2}$% convertible semestralmente, (*c*) $5\frac{1}{2}$% convertible trimestralmente. *Resp.* (*a*) 5,37%; (*b*) 5,44%; (*c*) 5,47%

40. Hallar el valor presente de una perpetuidad de, (*a*) \$1000 anuales, (*b*) \$1000 semestrales, suponiendo intereses al 5% efectivo. *Resp.* (*a*) \$20.000, (*b*) \$40.493,90

41. Supóngase que el bono del problema 33 es redimido el primero de julio de 1975. Hallar la utilidad del inversionista. *Resp.* (*a*) \$81,11; (*b*) \$84,19; (*c*) \$109,50; (*d*) \$59,35

42. Hallar el valor acumulado de \$2000 por $4\frac{1}{2}$ años al 5% efectivo, utilizándose, (*a*) la regla teórica, (*b*) la regla práctica.
Resp. (*a*) \$2491,04; (*b*) \$2491,78

43. Una deuda de \$4000, con vencimiento en 4 años, con interés al 4% convertible semestralmente va a ser pagada mediante un pago de \$1500 al término de 2 años y un pago X al término de 4 años. Hallar X suponiendo intereses del 5% efectivo.
Resp. \$3032,89

44. El primero de julio 1960, M obtiene un préstamo de \$1400 a 6 años, con intereses al 4% efectivo. El primero de julio de 1962 obtiene otro préstamo de \$1600 a 4 años con intereses al 4% convertible semestralmente. ¿Qué pagos iguales hechos el primero de julio de 1964 y el primero de julio de 1966 saldarán las deudas, suponiendo intereses al 4% convertible trimestralmente? *Resp.* \$1750,53

45. Una granja es vendida mediante \$10.000 de cuota inicial y 8 pagos semestrales de \$2500 cada uno, venciendo el primero al término del 3er. año. Hallar el valor de contado de la granja suponiendo intereses al, (*a*) 6% efectivo, (*b*) 5% convertible semestralmente, (*c*) 5% convertible trimestralmente.

Resp. (*a*) $10.000 + 2500\dfrac{1}{s_{\overline{1/2}|.06}}[a_{\overline{6}|.06} - a_{\overline{2}|.06}](1{,}06)^{-1/2} = 10.000 + 2500[1 + (1{,}06)^{-1/2}][a_{\overline{6}|.06} - a_{\overline{2}|.06}]$,
(*b*) \$25.843,39, (*c*) \$25.820,77

46. Un documento a 180 días por \$1250, con fecha 2 de enero de 1961 devenga interés simple al 5%. El 11 de febrero de 1961 el documento fue vendido al banco XYZ el cual carga el 8% de descuento simple ordinario. A su vez, el 18 de marzo de 1961 el documento fue vendido al Banco de la Reserva Federal el cual carga el 6% de descuento simple exacto. ¿Cuánto pagó cada banco por el documento? *Resp.* \$1241,39; \$1259,14

47. Un bono de \$1000, $4\frac{1}{2}$%, MS, es redimible el primero de septiembre de 1985 a 105. Hallar el precio de compra, (*a*) el primero de septiembre de 1963, (*b*) el primero de diciembre de 1963, suponiendo el 6% convertible semestralmente.
Resp. (*a*) \$831,71; (*b*) \$844,19

48. ¿A qué tasa nominal convertible trimestralmente el monto de \$300 es \$500 en 10 años? *Resp.* 5,14%

49. Un activo cuyo costo es \$4000, tiene una vida probable de 8 años siendo su valor de salvamento de \$800. Hallar su valor en libros después de 5 años utilizando, (*a*) el método lineal, (*b*) el método de porcentaje constante, (*c*) el método de fondo de amortización si el dinero puede invertirse con seguridad al 4% efectivo.
Resp. (*a*) \$2000; (*b*) \$1462,90; (*c*) \$2118,97

50. Cada trimestre se hacen depósitos de \$1000 en una cuenta que paga el 4% convertible trimestralmente. ¿Cuánto habrá en la cuenta, (*a*) justamente después del 15o. depósito?, (*b*) justamente antes del 10o. depósito. (*c*) ¿Qué tanto del incremento en la cuenta al hacerse el 12o. depósito se debe al interés? *Resp.* (*a*) \$1609,69; (*b*) \$946,22; (*c*) \$11,57

51. M debe \$1000, pagaderos al término de 5 años a partir de hoy, y \$2000, pagaderos al término de 10 años. Suponiendo intereses al 4% efectivo, ¿en qué fecha un pago de \$3000, saldará las deudas? *Resp.* A partir de hoy 8,23 años

52. ¿Cuál será el importe de los depósitos mensuales que tienen que hacerse en una cuenta de ahorros que paga el $2\frac{1}{2}$% convertible semestralmente para obtener \$5000, en 5 años? *Resp.* \$78,35

53. M depositó \$100 cada trimestre durante 25 años. Después empezó a retirar \$100 mensuales haciendo el primer retiro un mes después del último depósito. Si se pagan intereses al 3% convertible semestralmente, ¿cuántos retiros completos podrá hacer? *Resp.* 184

54. En una cuenta que paga el 3% convertible semestralmente se hacen depósitos anuales de \$2000. ¿Cuánto habrá en la cuenta justamente antes del 8o. depósito? *Resp.* $2000\left[\dfrac{1}{s_{\overline{2}|.015}}s_{\overline{16}|.015} - 1\right]$

55. ¿Qué cantidad depositada el día de hoy en una cuenta que paga el 4% convertible trimestralmente será suficiente para hacer 20 retiros trimestrales de \$500 cada uno, haciendo el primero al término del 3er. año? *Resp.* \$8087,33

56. Una casa avaluada en \$15.000 es vendida mediante \$5000 de inicial y pagos semestrales iguales por los próximos 20 años. ¿Cuál es el importe del pago semestral suponiendo intereses al, (*a*) $4\frac{1}{2}$% efectivo? (*b*) 4% convertible trimestralmente? *Resp.* (*a*) \$380,15; (*b*) \$366,20

57. M puede comprar una máquina en \$2000 la cual debe ser remplazada al término de 10 años con un costo de \$1600 o también otra que cuesta \$2500 la cual debe ser remplazada al término de 15 años a un costo de \$2000. ¿Qué máquina debe escoger suponiendo interés de 5% efectivo?

58. En una cierta fecha de pago de intereses el precio de compra de un bono que redítúa el 4% convertible mensualmente, y que paga \$30 semestrales, es \$1163,44. ¿Cuál debe ser la cotización en el mercado 2 meses después, que proporcione el mismo rendimiento? *Resp.* $116\frac{1}{8}$

59. Un refrigerador puede ser adquirido mediante \$10 de cuota inicial y \$10 mensuales por los próximos 17 meses. Suponiendo intereses al 6% convertible mensualmente, ¿cuál es el valor de contado? *Resp.* \$172,59

60. M tiene que acumular \$5000 haciendo 5 depósitos anuales iguales en un fondo que paga el 5% efectivo. ¿Cuánto habrá en el fondo justamente después del 3er. depósito? *Resp.* \$2852,60

61. M tiene \$2000 invertidos al 4% de interés simple, \$8000 al 5% y \$20.000 al 3%. ¿Cuál es la tasa promedio de interés que está ganando? *Resp.* 3,6%

62. Una máquina con costo de \$500 nueva debe ser remplazada al término de 15 años cuando su valor de salvamento es \$50. Hallar el costo capitalizado al 5% efectivo. *Resp.* \$917,10

63. Un bono de \$1000, $3\frac{1}{2}$%, JD, es redimible el primero de junio de 1988. Hallar su precio neto al 15 de enero de 1963, si su precio "con interés" fue $102\frac{5}{8}$. *Resp.* \$1031,88

64. M deposita \$100 al final de cada 6 meses durante 4 años. ¿Cuánto tendrá en su cuenta si se le acreditan intereses al, (*a*) $3\frac{1}{2}$% convertible semestralmente? (*b*) 4% efectivo? (*c*) 4% convertible trimestralmente?
Resp. (*a*) \$850,75; (*b*) \$857,70; (*c*) \$858,60

65. M acuerda pagar una deuda de \$1500 mediante 30 pagos mensuales de \$60 cada uno. ¿Qué tasa efectiva de interés está pagando?
Sugerencia: $i \;=\; (1+j/12)^{12} - 1$ donde $\dfrac{1}{a_{\overline{30}|j/12}} \;=\; 0{,}04$

66. Principiando al cumplir un año su hijo y terminando al cumplir 21 años, un padre deposita en un fondo una cantidad igual a X veces la edad de su hijo. Si el fondo paga una tasa efectiva i, demostrar que el monto en el fondo justamente después del último depósito es

$$S \;=\; \frac{X}{i}(s_{\overline{22}|i} - 22)$$

67. Resolver el problema 66 si los depósitos anuales son $X, X+Y, X+2Y, \ldots, X+20Y$.

Resp. $S \;=\; X\,s_{\overline{21}|i} + \dfrac{Y}{i}(s_{\overline{21}|i} - 21)$

68. Suponiendo que el saldo B (véase el capítulo 6) va a ser pagado mediante n pagos iguales de R cada uno; suponiendo intereses al $i = r/m$ por intervalo de pago, tenemos que

$$B \;=\; R\,a_{\overline{n}|i} \;=\; R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (I)$$

(*a*) Aproximar $(1+i)^{-n}$ mediante $1 - ni + \frac{1}{2}n(n+1)i^2$, los 3 primeros términos de la expansión binomial y obtener $r = mi = \dfrac{2mI}{Rn(n+1)}$, o sea la fórmula de serie de pagos.

(*b*) Utilizar $Rn = B + I$ en (I) para obtener $B = \dfrac{I[1-(1+i)^{-n}]}{ni - [1-(1+i)^{-n}]}$. Tenemos que aproximadamente,

$$B \;=\; \frac{I[1-(1-ni)]}{ni - [1 - \{1 - ni + \frac{1}{2}n(n+1)i^2\}]} \;=\; \frac{2I}{(n+1)i} \qquad \text{y} \qquad r = \frac{2mI}{B(n+1)}$$

en donde r es aproximado mediante d de la fórmula de razón constante.

(*c*) De (I) tenemos que $B(1+i)^n = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ por lo cual aproximadamente

$$B(1+ni) \;=\; R\,\frac{(1+ni+\frac{1}{2}n(n-1)i^2) - 1}{i} \qquad \text{y} \qquad r \;=\; \frac{2mI}{B(n+1) - I(n-1)}$$

que es la fórmula comercial.

Indice de tablas

TABLA I. Mantisas con seis decimales

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
100	00 0000	0434	0868	1301	1734	2166	2598	3029	3461	3891	432
1	4321	4751	5181	5609	6038	6466	6894	7321	7748	8174	428
2	8600	9026	9451	9876	*0300	*0724	*1147	*1570	*1993	*2415	424
3	01 2837	3259	3680	4100	4521	4940	5360	5779	6197	6616	420
4	7033	7451	7868	8284	8700	9116	9532	9947	*0361	*0775	416
105	02 1189	1603	2016	2428	2841	3252	3664	4075	4486	4896	412
6	5306	5715	6125	6533	6942	7350	7757	8164	8571	8978	408
7	9384	9789	*0195	*0600	*1004	*1408	*1812	*2216	*2619	*3021	404
8	03 3124	3826	4227	4628	5029	5430	5830	6230	6629	7028	400
9	7426	7825	8223	8620	9017	9414	9811	*0207	*0602	*0998	397

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
434	43,4	86,8	130,2	173,6	217,0	260,4	303,8	347,2	390,6
433	43,3	86,6	129,9	173,2	216,5	259,8	303,1	346,4	389,7
432	43,2	86,4	129,6	172,8	216,0	259,2	302,4	345,6	388,8
431	43,1	86,2	129,3	172,4	215,5	258,6	301,7	344,8	387,9
430	43,0	86,0	129,0	172,0	215,0	258,0	301,0	344,0	387,0
429	42,9	85,8	128,7	171,6	214,5	257,4	300,3	343,2	386,1
428	42,8	85,6	128,4	171,2	214,0	256,8	299,6	342,4	385,2
427	42,7	85,4	128,1	170,8	213,5	256,2	298,9	341,6	384,3
426	42,6	85,2	127,8	170,4	213,0	255,6	298,2	340,8	383,4
425	42,5	85,0	127,5	170,0	212,5	255,0	297,5	340,0	382,5
424	42,4	84,8	127,2	169,6	212,0	254,4	296,8	339,2	381,6
423	42,3	84,6	126,9	169,2	211,5	253,8	296,1	338,4	380,7
422	42,2	84,4	126,6	168,8	211,0	253,2	295,4	337,6	379,8
421	42,1	84,2	126,3	168,4	210,5	252,6	294,7	336,8	378,9
420	42,0	84,0	126,0	168,0	210,0	252,0	294,0	336,0	378,0
419	41,9	83,8	125,7	167,6	209,5	251,4	293,3	335,2	377,1
418	41,8	83,6	125,4	167,2	209,0	250,8	292,6	334,4	376,2
417	41,7	83,4	125,1	166,8	208,5	250,2	291,9	333,6	375,3
416	41,6	83,2	124,8	166,4	208,0	249,6	291,2	332,8	374,4
415	41,5	83,0	124,5	166,0	207,5	249,0	290,5	332,0	373,5
414	41,4	82,8	124,2	165,6	207,0	248,4	289,8	331,2	372,6
413	41,3	82,6	123,9	165,2	206,5	247,8	289,1	330,4	371,7
412	41,2	82,4	123,6	164,8	206,0	247,2	288,4	329,6	370,8
411	41,1	82,2	123,3	164,4	205,5	246,6	287,7	328,8	369,9
410	41,0	82,0	123,0	164,0	205,0	246,0	287,0	328,0	369,0
409	40,9	81,8	122,7	163,6	204,5	245,4	286,3	327,2	368,1
408	40,8	81,6	122,4	163,2	204,0	244,8	285,6	326,4	367,2
407	40,7	81,4	122,1	162,8	203,5	244,2	284,9	325,6	366,3
406	40,6	81,2	121,8	162,4	203,0	243,6	284,2	324,8	365,4
405	40,5	81,0	121,5	162,0	202,5	243,0	283,5	324,0	364,5
404	40,4	80,8	121,2	161,6	202,0	242,4	282,8	323,2	363,6
403	40,3	80,6	120,9	161,2	201,5	241,8	282,1	322,4	362,7
402	40,2	80,4	120,6	160,8	201,0	241,2	281,4	321,6	361,8
401	40,1	80,2	120,3	160,4	200,5	240,6	280,7	320,8	360,9
400	40,0	80,0	120,0	160,0	200,0	240,0	280,0	320,0	360,0
399	39,9	79,8	119,7	159,6	199,5	239,4	279,3	319,2	359,1
398	39,8	79,6	119,4	159,2	199,0	238,8	278,6	318,4	358,2
397	39,7	79,4	119,1	158,8	198,5	238,2	277,9	317,6	357,3
396	39,6	79,2	118,8	158,4	198,0	237,6	277,2	316,8	356,4

TABLA I. Mantisas con seis decimales

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
110	04 1393	1787	2182	2576	2969	3362	3755	4148	4540	4932	393
1	5323	5714	6105	6495	6885	7275	7664	8053	8442	8830	390
2	9218	9606	9993	*0380	*0766	*1153	*1538	*1924	*2309	*2694	386
3	05 3078	3463	3846	4230	4613	4996	5378	5760	6142	6524	383
4	6905	7286	7666	8046	8426	8805	9185	9563	9942	*0320	379
115	06 0698	1075	1452	1829	2206	2582	2958	3333	3709	4083	376
6	4458	4832	5206	5580	5953	6326	6699	7071	7443	7815	373
7	8186	8557	8928	9298	9668	*0038	*0407	*0776	*1145	*1514	370
8	07 1882	2250	2617	2985	3352	3718	4085	4451	4816	5182	366
9	5547	5912	6276	6640	7004	7368	7731	8094	8457	8819	363

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
395	39,5	79,0	118,5	158,0	197,5	237,0	276,5	316,0	355,5
394	39,4	78,8	118,2	157,6	197,0	236,4	275,8	315,2	354,6
393	39,3	78,6	117,9	157,2	196,5	235,8	275,1	314,4	353,7
392	39,2	78,4	117,6	156,8	196,0	235,2	274,4	313,6	352,8
391	39,1	78,2	117,3	156,4	195,5	234,6	273,7	312,8	351,9
390	39,0	78,0	117,0	156,0	195,0	234,0	273,0	312,0	351,0
389	38,9	77,8	116,7	155,6	194,5	233,4	272,3	311,2	350,1
388	38,8	77,6	116,4	155,2	194,0	232,8	271,6	310,4	349,2
387	38,7	77,4	116,1	154,8	193,5	232,2	270,9	309,6	348,3
386	38,6	77,2	115,8	154,4	193,0	231,6	270,2	308,8	347,4
385	38,5	77,0	115,5	154,0	192,5	231,0	269,5	308,0	346,5
384	38,4	76,8	115,2	153,6	192,0	230,4	268,8	307,2	345,6
383	38,3	76,6	114,9	153,2	191,5	229,8	268,1	306,4	344,7
382	38,2	76,4	114,6	152,8	191,0	229,2	267,4	305,6	343,8
381	38,1	76,2	114,3	152,4	190,5	228,6	266,7	304,8	342,9
380	38,0	76,0	114,0	152,0	190,0	228,0	266,0	304,0	342,0
379	37,9	75,8	113,7	151,6	189,5	227,4	265,3	303,2	341,1
378	37,8	75,6	113,4	151,2	189,0	226,8	264,6	302,4	340,2
377	37,7	75,4	113,1	150,8	188,5	226,2	263,9	301,6	339,3
376	37,6	75,2	112,8	150,4	188,0	225,6	263,2	300,8	338,4
375	37,5	75,0	112,5	150,0	187,5	225,0	262,5	300,0	337,5
374	37,4	74,8	112,2	149,6	187,0	224,4	261,8	299,2	336,6
373	37,3	74,6	111,9	149,2	186,5	223,8	261,1	298,4	335,7
372	37,2	74,4	111,6	148,8	186,0	223,2	260,4	297,6	334,8
371	37,1	74,2	111,3	148,4	185,5	222,6	259,7	296,8	333,9
370	37,0	74,0	111,0	148,0	185,0	222,0	259,0	296,0	333,0
369	36,9	73,8	110,7	147,6	184,5	221,4	258,3	295,2	332,1
368	36,8	73,6	110,4	147,2	184,0	220,8	257,6	294,4	331,2
367	36,7	73,4	110,1	146,8	183,5	220,2	256,9	293,6	330,3
366	36,6	73,2	109,8	146,4	183,0	219,6	256,2	292,8	329,4
365	36,5	73,0	109,5	146,0	182,5	219,0	255,5	292,0	328,5
364	36,4	72,8	109,2	145,6	182,0	218,4	254,8	291,2	327,6
363	36,3	72,6	108,9	145,2	181,5	217,8	254,1	290,4	326,7
362	36,2	72,4	108,6	144,8	181,0	217,2	253,4	289,6	325,8

TABLA I. Mantisas con seis decimales

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
120	07 9181	9543	9904	*0266	*0626	*0987	*1347	*1707	*2067	*2426	360
1	08 2785	3144	3503	3861	4219	4576	4934	5291	5647	6004	357
2	6360	6716	7071	7426	7781	8136	8490	8845	9198	9552	355
3	9905	*0258	*0611	*0963	*1315	*1667	*2018	*2370	*2721	*3071	352
4	09 3422	3772	4122	4471	4820	5169	5518	5866	6215	6562	349
125	09 6910	7257	7604	7951	8298	8644	8990	9335	9681	*0026	346
6	10 0371	0715	1059	1403	1747	2091	2434	2777	3119	3462	343
7	3804	4146	4487	4828	5169	5510	5851	6191	6531	6871	341
8	7210	7549	7888	8227	8565	8903	9241	9579	9916	*0253	338
9	11 0590	0926	1263	1599	1934	2270	2605	2940	3275	3609	335
130	11 3943	4277	4611	4944	5278	5611	5943	6276	6608	6940	333
1	7271	7603	7934	8265	8595	8926	9256	9586	9915	*0245	330
2	12 0574	0903	1231	1560	1888	2216	2544	2871	3198	3525	328
3	3852	4178	4504	4830	5156	5481	5806	6131	6456	6781	325
4	7105	7429	7753	8076	8399	8722	9045	9368	9690	*0012	323

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
362	36,2	72,4	108,6	144,8	181,0	217,2	253,4	289,6	325,8
361	36,1	72,2	108,3	144,4	180,5	216,6	252,7	288,8	324,9
360	36,0	72,0	108,0	144,0	180,0	216,0	252,0	288,0	324,0
359	35,9	71,8	107,7	143,6	179,5	215,4	251,3	287,2	323,1
358	35,8	71,6	107,4	143,2	179,0	214,8	250,6	286,4	322,2
357	35,7	71,4	107,1	142,8	178,5	214,2	249,9	285,6	321,3
356	35,6	71,2	106,8	142,4	178,0	213,6	249,2	284,8	320,4
355	35,5	71,0	106,5	142,0	177,5	213,0	248,5	284,0	319,5
354	35,4	70,8	106,2	141,6	177,0	212,4	247,8	283,2	318,6
353	35,3	70,6	105,9	141,2	176,5	211,8	247,1	282,4	317,7
352	35,2	70,4	105,6	140,8	176,0	211,2	246,4	281,6	316,8
351	35,1	70,2	105,3	140,4	175,5	210,6	245,7	280,8	315,9
350	35,0	70,0	105,0	140,0	175,0	210,0	245,0	280,0	315,0
349	34,9	69,8	104,7	139,6	174,5	209,4	244,3	279,2	314,1
348	34,8	69,6	104,4	139,2	174,0	208,8	243,6	278,4	313,2
347	34,7	69,4	104,1	138,8	173,5	208,2	242,9	277,6	312,3
346	34,6	69,2	103,8	138,4	173,0	207,6	242,2	276,8	311,4
345	34,5	69,0	103,5	138,0	172,5	207,0	241,5	276,0	310,5
344	34,4	68,8	103,2	137,6	172,0	206,4	240,8	275,2	309,6
343	34,3	68,6	102,9	137,2	171,5	205,8	240,1	274,4	308,7
342	34,2	68,4	102,6	136,8	171,0	205,2	239,4	273,6	307,8
341	34,1	68,2	102,3	136,4	170,5	204,6	238,7	272,8	306,9
340	34,0	68,0	102,0	136,0	170,0	204,0	238,0	272,0	306,0
339	33,9	67,8	101,7	135,6	169,5	203,4	237,3	271,2	305,1
338	33,8	67,6	101,4	135,2	169,0	202,8	236,6	270,4	304,2
337	33,7	67,4	101,1	134,8	168,5	202,2	235,9	269,6	303,3
336	33,6	67,2	100,8	134,4	168,0	201,6	235,2	268,8	302,4
335	33,5	67,0	100,5	134,0	167,5	201,0	234,5	268,0	301,5
334	33,4	66,8	100,2	133,6	167,0	200,4	233,8	267,2	300,6
333	33,3	66,6	99,9	133,2	166,5	199,8	233,1	266,4	299,7
332	33,2	66,4	99,6	132,8	166,0	199,2	232,4	265,6	298,8
331	33,1	66,2	99,3	132,4	165,5	198,6	231,7	264,8	297,9
330	33,0	66,0	99,0	132,0	165,0	198,0	231,0	264,0	297,0
329	32,9	65,8	98,7	131,6	164,5	197,4	230,3	263,2	296,1
328	32,8	65,6	98,4	131,2	164,0	196,8	229,6	262,4	295,2
327	32,7	65,4	98,1	130,8	163,5	196,2	228,9	261,6	294,3
326	32,6	65,2	97,8	130,4	163,0	195,6	228,2	260,8	293,4
325	32,5	65,0	97,5	130,0	162,5	195,0	227,5	260,0	292,5
324	32,4	64,8	97,2	129,6	162,0	194,4	226,8	259,2	291,6
323	32,3	64,6	96,9	129,2	161,5	193,8	226,1	258,4	290,7
322	32,2	64,4	96,6	128,8	161,0	193,2	225,4	257,6	289,8

TABLA I. Mantisas con seis decimales

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
135	13 0334	0655	0977	1298	1619	1939	2260	2580	2900	3219	321
6	3539	3858	4177	4496	4814	5133	5451	5769	6086	6403	318
7	6721	7037	7354	7671	7987	8303	8618	8934	9249	9564	316
8	9879	*0194	*0508	*0822	*1136	*1450	*1763	*2076	*2389	*2702	314
9	14 3015	3327	3639	3951	4263	4574	4885	5196	5507	5818	311
140	14 6128	6438	6748	7058	7367	7676	7985	8294	8603	8911	309
1	9219	9527	9835	*0142	*0449	*0756	*1063	*1370	*1676	*1982	307
2	15 2288	2594	2900	3205	3510	3815	4120	4424	4728	5032	305
3	5336	5640	5943	6246	6549	6852	7154	7457	7759	8061	303
4	8362	8664	8965	9266	9567	9868	*0168	*0469	*0769	*1068	301
145	16 1368	1667	1967	2266	2564	2863	3161	3460	3758	4055	299
6	4353	4650	4947	5244	5541	5838	6134	6430	6726	7022	297
7	7317	7613	7908	8203	8497	8792	9086	9380	9674	9968	295
8	17 0262	0555	0848	1141	1434	1726	2019	2311	2603	2895	293
9	3186	3478	3769	4060	4351	4641	4932	5222	5512	5802	291

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
322	32,2	64,4	96,6	128,8	161,0	193,2	225,4	257,6	289,8
321	32,1	64,2	96,3	128,4	160,5	192,6	224,7	256,8	288,9
320	32,0	64,0	96,0	128,0	160,0	192,0	224,0	256,0	288,0
319	31,9	63,8	95,7	127,6	159,5	191,4	223,3	255,2	287,1
318	31,8	63,6	95,4	127,2	159,0	190,8	222,6	254,4	286,2
317	31,7	63,4	95,1	126,8	158,5	190,2	221,9	253,6	285,3
316	31,6	63,2	94,8	126,4	158,0	189,6	221,2	252,8	284,4
315	31,5	63,0	94,5	126,0	157,5	189,0	220,5	252,0	283,5
314	31,4	62,8	94,2	125,6	157,0	188,4	219,8	251,2	282,6
313	31,3	62,6	93,9	125,2	156,5	187,8	219,1	250,4	281,7
312	31,2	62,4	93,6	124,8	156,0	187,2	218,4	249,6	280,8
311	31,1	62,2	93,3	124,4	155,5	186,6	217,7	248,8	279,9
310	31,0	62,0	93,0	124,0	155,0	186,0	217,0	248,0	279,0
309	30,9	61,8	92,7	123,6	154,5	185,4	216,3	247,2	278,1
308	30,8	61,6	92,4	123,2	154,0	184,8	215,6	246,4	277,2
307	30,7	61,4	92,1	122,8	153,5	184,2	214,9	245,6	276,3
306	30,6	61,2	91,8	122,4	153,0	183,6	214,2	244,8	275,4
305	30,5	61,0	91,5	122,0	152,5	183,0	213,5	244,0	274,5
304	30,4	60,8	91,2	121,6	152,0	182,4	212,8	243,2	273,6
303	30,3	60,6	90,9	121,2	151,5	181,8	212,1	242,4	272,7
302	30,2	60,4	90,6	120,8	151,0	181,2	211,4	241,6	271,8
301	30,1	60,2	90,3	120,4	150,5	180,6	210,7	240,8	270,9
300	30,0	60,0	90,0	120,0	150,0	180,0	210,0	240,0	270,0
299	29,9	59,8	89,7	119,6	149,5	179,4	209,3	239,2	269,1
298	29,8	59,6	89,4	119,2	149,0	178,8	208,6	238,4	268,2
297	29,7	59,4	89,1	118,8	148,5	178,2	207,9	237,6	267,3
296	29,6	59,2	88,8	118,4	148,0	177,6	207,2	236,8	266,4
295	29,5	59,0	88,5	118,0	147,5	177,0	206,5	236,0	265,5
294	29,4	58,8	88,2	117,6	147,0	176,4	205,8	235,2	264,6
293	29,3	58,6	87,9	117,2	146,5	175,8	205,1	234,4	263,7
292	29,2	58,4	87,6	116,8	146,0	175,2	204,4	233,6	262,8
291	29,1	58,2	87,3	116,4	145,5	174,6	203,7	232,8	261,9
290	29,0	58,0	87,0	116,0	145,0	174,0	203,0	232,0	261,0

150	17 6091	6381	6670	6959	7248	7536	7825	8113	8401	8689	289
1	8977	9264	9552	9839	*0126	*0413	*0699	*0986	*1272	*1558	287
2	18 1844	2129	2415	2700	2985	3270	3555	3839	4123	4407	285
3	4691	4975	5259	5542	5825	6108	6391	6674	6956	7239	283
4	7521	7803	8084	8366	8647	8928	9209	9490	9771	*0051	281
155	19 0332	0612	0892	1171	1451	1730	2010	2289	2567	2846	279
6	3125	3403	3681	3959	4237	4514	4792	5069	5346	5623	278
7	5900	6176	6453	6729	7005	7281	7556	7832	8107	8382	276
8	8657	8932	9206	9481	9755	*0029	*0303	*0577	*0850	*1124	274
9	20 1397	1670	1943	2216	2488	2761	3033	3305	3577	3848	272
160	20 4120	4391	4663	4934	5204	5475	5746	6016	6286	6556	271
1	6826	7096	7365	7634	7904	8173	8441	8710	8979	9247	269
2	9515	9783	*0051	*0319	*0586	*0853	*1121	*1388	*1654	*1921	267
3	21 2188	2454	2720	2986	3252	3518	3783	4049	4314	4579	266
4	4844	5109	5373	5638	5902	6166	6430	6694	6957	7221	264
165	21 7484	7747	8010	8273	8536	8798	9060	9323	9585	9846	262
6	22 0108	0370	0631	0892	1153	1414	1675	1936	2196	2456	261
7	2716	2976	3236	3496	3755	4015	4274	4533	4792	5051	259
8	5309	5568	5826	6084	6342	6600	6858	7115	7372	7630	258
9	7887	8144	8400	8657	8913	9170	9426	9682	9938	*0193	256

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
290	29,0	58,0	87,0	116,0	145,0	174,0	203,0	232,0	261,0
289	28,9	57,8	86,7	115,6	144,5	173,4	202,3	231,2	260,1
288	28,8	57,6	86,4	115,2	144,0	172,8	201,6	230,4	259,2
287	28,7	57,4	86,1	114,8	143,5	172,2	200,9	229,6	258,3
286	28,6	57,2	85,8	114,4	143,0	171,6	200,2	228,8	257,4
285	28,5	57,0	85,5	114,0	142,5	171,0	199,5	228,0	256,5
284	28,4	56,8	85,2	113,6	142,0	170,4	198,8	227,2	255,6
283	28,3	56,6	84,9	113,2	141,5	169,8	198,1	226,4	254,7
282	28,2	56,4	84,6	112,8	141,0	169,2	197,4	225,6	253,8
281	28,1	56,2	84,3	112,4	140,5	168,6	196,7	224,8	252,9
280	28,0	56,0	84,0	112,0	140,0	168,0	196,0	224,0	252,0
279	27,9	55,8	83,7	111,6	139,5	167,4	195,3	223,2	251,1
278	27,8	55,6	83,4	111,2	139,0	166,8	194,6	222,4	250,2
277	27,7	55,4	83,1	110,8	138,5	166,2	193,9	221,6	249,3
276	27,6	55,2	82,8	110,4	138,0	165,6	193,2	220,8	248,4
275	27,5	55,0	82,5	110,0	137,5	165,0	192,5	220,0	247,5
274	27,4	54,8	82,2	109,6	137,0	164,4	191,8	219,2	246,6
273	27,3	54,6	81,9	109,2	136,5	163,8	191,1	218,4	245,7
272	27,2	54,4	81,6	108,8	136,0	163,2	190,4	217,6	244,8
271	27,1	54,2	81,3	108,4	135,5	162,6	189,7	216,8	243,9
270	27,0	54,0	81,0	108,0	135,0	162,0	189,0	216,0	243,0
269	26,9	53,8	80,7	107,6	134,5	161,4	188,3	215,2	242,1
268	26,8	53,6	80,4	107,2	134,0	160,8	187,6	214,4	241,2
267	26,7	53,4	80,1	106,8	133,5	160,2	186,9	213,6	240,3
266	26,6	53,2	79,8	106,4	133,0	159,6	186,2	212,8	239,4
265	26,5	53,0	79,5	106,0	132,5	159,0	185,5	212,0	238,5
264	26,4	52,8	79,2	105,6	132,0	158,4	184,8	211,2	237,6
263	26,3	52,6	78,9	105,2	131,5	157,8	184,1	210,4	236,7
262	26,2	52,4	78,6	104,8	131,0	157,2	183,4	209,6	235,8
261	26,1	52,2	78,3	104,4	130,5	156,6	182,7	208,8	234,9
260	26,0	52,0	78,0	104,0	130,0	156,0	182,0	208,0	234,0
259	25,9	51,8	77,7	103,6	129,5	155,4	181,3	207,2	233,1
258	25,8	51,6	77,4	103,2	129,0	154,8	180,6	206,4	232,2
257	25,7	51,4	77,1	102,8	128,5	154,2	179,9	205,6	231,3
256	25,6	51,2	76,8	102,4	128,0	153,6	179,2	204,8	230,4
255	25,5	51,0	76,5	102,0	127,5	153,0	178,5	204,0	229,5

170	23 0449	0704	0960	1216	1470	1724	1979	2234	2488	2742	[illegible]
1	2996	3250	3504	3757	4011	4264	4517	4770	5023	5276	253
2	5528	5781	6033	6285	6537	6789	7041	7292	7544	7795	252
3	8046	8297	8548	8799	9049	9299	9550	9800	*0050	*0300	250
4	24 0549	0799	1048	1297	1546	1795	2044	2293	2541	2790	249
175	24 3038	3286	3534	3782	4030	4277	4525	4772	5019	5266	248
6	5513	5759	6006	6252	6499	6745	6991	7237	7482	7728	246
7	7973	8219	8464	8709	8954	9198	9443	9687	9932	*0176	245
8	25 0420	0664	0908	1151	1395	1638	1881	2125	2368	2610	243
9	2853	3096	3338	3580	3822	4064	4306	4548	4790	5031	242
180	25 5273	5514	5755	5996	6237	6477	6718	6958	7198	7439	241
1	7679	7918	8158	8398	8637	8877	9116	9355	9594	9833	239
2	26 0071	0310	0548	0787	1025	1263	1501	1739	1976	2214	238
3	2451	2688	2925	3162	3399	3636	3873	4109	4346	4582	237
4	4818	5054	5290	5525	5761	5996	6232	6467	6702	6937	235
185	26 7172	7406	7641	7875	8110	8344	8578	8812	9046	9279	234
6	9513	9746	9980	*0213	*0446	*0679	*0912	*1144	*1377	*1609	233
7	27 1842	2074	2306	2538	2770	3001	3233	3464	3696	3927	232
8	4158	4389	4620	4850	5081	5311	5542	5772	6002	6232	230
9	6462	6692	6921	7151	7380	7609	7838	8067	8296	8525	229
190	27 8754	8982	9211	9439	9667	9895	*0123	*0351	*0578	*0806	228
1	28 1033	1261	1488	1715	1942	2169	2396	2622	2849	3075	227
2	3301	3527	3753	3979	4205	4431	4656	4882	5107	5332	226
3	5557	5782	6007	6232	6456	6681	6905	7130	7354	7578	225
4	7802	8026	8249	8473	8696	8920	9143	9366	9589	9812	223

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
255	25,5	51,0	76,5	102,0	127,5	153,0	178,5	204,0	229,5
254	25,4	50,8	76,2	101,6	127,0	152,4	177,8	203,2	228,6
253	25,3	50,6	75,9	101,2	126,5	151,8	177,1	202,4	227,7
252	25,2	50,4	75,6	100,8	126,0	151,2	176,4	201,6	226,8
251	25,1	50,2	75,3	100,4	125,5	150,6	175,7	200,8	225,9
250	25,0	50,0	75,0	100,0	125,0	150,0	175,0	200,0	225,0
249	24,9	49,8	74,7	99,6	124,5	149,4	174,3	199,2	224,1
248	24,8	49,6	74,4	99,2	124,0	148,8	173,6	198,4	223,2
247	24,7	49,4	74,1	98,8	123,5	148,2	172,9	197,6	222,3
246	24,6	49,2	73,8	98,4	123,0	147,6	172,2	196,8	221,4
245	24,5	49,0	73,5	98,0	122,5	147,0	171,5	196,0	220,5
244	24,4	48,8	73,2	97,6	122,0	146,4	170,8	195,2	219,6
243	24,3	48,6	72,9	97,2	121,5	145,8	170,1	194,4	218,7
242	24,2	48,4	72,6	96,8	121,0	145,2	169,4	193,6	217,8
241	24,1	48,2	72,3	96,4	120,5	144,6	168,7	192,8	216,9
240	24,0	48,0	72,0	96,0	120,0	144,0	168,0	192,0	216,0
239	23,9	47,8	71,7	95,6	119,5	143,4	167,3	191,2	215,1
238	23,8	47,6	71,4	95,2	119,0	142,8	166,6	190,4	214,2
237	23,7	47,4	71,1	94,8	118,5	142,2	165,9	189,6	213,3
236	23,6	47,2	70,8	94,4	118,0	141,6	165,2	188,8	212,4
235	23,5	47,0	70,5	94,0	117,5	141,0	164,5	188,0	211,5
234	23,4	46,8	70,2	93,6	117,0	140,4	163,8	187,2	210,6
233	23,3	46,6	69,9	93,2	116,5	139,8	163,1	186,4	209,7
232	23,2	46,4	69,6	92,8	116,0	139,2	162,4	185,6	208,8
231	23,1	46,2	69,3	92,4	115,5	138,6	161,7	184,8	207,9
230	23,0	46,0	69,0	92,0	115,0	138,0	161,0	184,0	207,0
229	22,9	45,8	68,7	91,6	114,5	137,4	160,3	183,2	206,1
228	22,8	45,6	68,4	91,2	114,0	136,8	159,6	182,4	205,2
227	22,7	45,4	68,1	90,8	113,5	136,2	158,9	181,6	204,3
226	22,6	45,2	67,8	90,4	113,0	135,6	158,2	180,8	203,4
225	22,5	45,0	67,5	90,0	112,5	135,0	157,5	180,0	202,5
224	22,4	44,8	67,2	89,6	112,0	134,4	156,8	179,2	201,6
223	22,3	44,6	66,9	89,2	111,5	133,8	156,1	178,4	200,7

TABLA I. Mantisas con seis decimales

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
195	29 0035	0257	0480	0702	0925	1147	1369	1591	1813	2034	222
6	2256	2478	2699	2920	3141	3363	3584	3804	4025	4246	221
7	4466	4687	4907	5127	5347	5567	5787	6007	6226	6446	220
8	6665	6884	7104	7323	7542	7761	7979	8198	8416	8635	219
9	8853	9071	9289	9507	9725	9943	*0161	*0378	*0595	*0813	218
200	30 1030	1247	1464	1681	1898	2114	2331	2547	2764	2980	217
1	3196	3412	3628	3844	4059	4275	4491	4706	4921	5136	216
2	5351	5566	5781	5996	6211	6425	6639	6854	7068	7282	215
3	7496	7710	7924	8137	8351	8564	8778	8991	9204	9417	213
4	9630	9843	*0056	*0268	*0481	*0693	*0906	*1118	*1330	*1542	212
205	31 1754	1966	2177	2389	2600	2812	3023	3234	3445	3656	211
6	3867	4078	4289	4499	4710	4920	5130	5340	5551	5760	210
7	5970	6180	6390	6599	6809	7018	7227	7436	7646	7854	209
8	8063	8272	8481	8689	8898	9106	9314	9522	9730	9938	208
9	32 0146	0354	0562	0769	0977	1184	1391	1598	1805	2012	207
210	32 2219	2426	2633	2839	3046	3252	3458	3665	3871	4077	206
1	4282	4488	4694	4899	5105	5310	5516	5721	5926	6131	205
2	6336	6541	6745	6950	7155	7359	7563	7767	7972	8176	204
3	8380	8583	8787	8991	9194	9398	9601	9805	*0008	*0211	203
4	33 0414	0617	0819	1022	1225	1427	1630	1832	2034	2236	202
215	33 2438	2640	2842	3044	3246	3447	3649	3850	4051	4253	202
6	4454	4655	4856	5057	5257	5458	5658	5859	6059	6260	201
7	6460	6660	6860	7060	7260	7459	7659	7858	8058	8257	200
8	8456	8656	8855	9054	9253	9451	9650	9849	*0047	*0246	199
9	34 0444	0642	0841	1039	1237	1435	1632	1830	2028	2225	198

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
223	22,3	44,6	66,9	89,2	111,5	133,8	156,1	178,4	200,7
222	22,2	44,4	66,6	88,8	111,0	133,2	155,4	177,6	199,8
221	22,1	44,2	66,3	88,4	110,5	132,6	154,7	176,8	198,9
220	22,0	44,0	66,0	88,0	110,0	132,0	154,0	176,0	198,0
219	21,9	43,8	65,7	87,6	109,5	131,4	153,3	175,2	197,1
218	21,8	43,6	65,4	87,2	109,0	130,8	152,6	174,4	196,2
217	21,7	43,4	65,1	86,8	108,5	130,2	151,9	173,6	195,3
216	21,6	43,2	64,8	86,4	108,0	129,6	151,2	172,8	194,4
215	21,5	43,0	64,5	86,0	107,5	129,0	150,5	172,0	193,5
214	21,4	42,8	64,2	85,6	107,0	128,4	149,8	171,2	192,6
213	21,3	42,6	63,9	85,2	106,5	127,8	149,1	170,4	191,7
212	21,2	42,4	63,6	84,8	106,0	127,2	148,4	169,6	190,8
211	21,1	42,2	63,3	84,4	105,5	126,6	147,7	168,8	189,9
210	21,0	42,0	63,0	84,0	105,0	126,0	147,0	168,0	189,0
209	20,9	41,8	62,7	83,6	104,5	125,4	146,3	167,2	188,1
208	20,8	41,6	62,4	83,2	104,0	124,8	145,6	166,4	187,2
207	20,7	41,4	62,1	82,8	103,5	124,2	144,9	165,6	186,3
206	20,6	41,2	61,8	82,4	103,0	123,6	144,2	164,8	185,4
205	20,5	41,0	61,5	82,0	102,5	123,0	143,5	164,0	184,5
204	20,4	40,8	61,2	81,6	102,0	122,4	142,8	163,2	183,6
203	20,3	40,6	60,9	81,2	101,5	121,8	142,1	162,4	182,7
202	20,2	40,4	60,6	80,8	101,0	121,2	141,4	161,6	181,8
201	20,1	40,2	60,3	80,4	100,5	120,6	140,7	160,8	180,9
200	20,0	40,0	60,0	80,0	100,0	120,0	140,0	160,0	180,0
199	19,9	39,8	59,7	79,6	99,5	119,4	139,3	159,2	179,1
198	19,8	39,6	59,4	79,2	99,0	118,8	138,6	158,4	178,2
197	19,7	39,4	59,1	78,8	98,5	118,2	137,9	157,6	177,3

TABLA I. Mantisas con seis decimales

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
220	34 2423	2620	2817	3014	3212	3409	3606	3802	3999	4196	197
1	4392	4589	4785	4981	5178	5374	5570	5766	5962	6157	196
2	6353	6549	6744	6939	7135	7330	7525	7720	7915	8110	195
3	8305	8500	8694	8889	9083	9278	9472	9666	9860	*0054	194
4	35 0248	0442	0636	0829	1023	1216	1410	1603	1796	1989	193
225	35 2183	2375	2568	2761	2954	3147	3339	3532	3724	3916	193
6	4108	4301	4493	4685	4876	5068	5260	5452	5643	5834	192
7	6026	6217	6408	6599	6790	6981	7172	7363	7554	7744	191
8	7935	8125	8316	8506	8696	8886	9076	9266	9456	9646	190
9	9835	*0025	*0215	*0404	*0593	*0783	*0972	*1161	*1350	*1539	189
230	36 1728	1917	2105	2294	2482	2671	2859	3048	3236	3424	188
1	3612	3800	3988	4176	4363	4551	4739	4926	5113	5301	188
2	5488	5675	5862	6049	6236	6423	6610	6796	6983	7169	187
3	7356	7542	7729	7915	8101	8287	8473	8659	8845	9030	186
4	9216	9401	9587	9772	9958	*0143	*0328	*0513	*0698	*0883	185
235	37 1068	1253	1437	1622	1806	1991	2175	2360	2544	2728	184
6	2912	3096	3280	3464	3647	3831	4015	4198	4382	4565	184
7	4748	4932	5115	5298	5481	5664	5846	6029	6212	6394	183
8	6577	6759	6942	7124	7306	7488	7670	7852	8034	8216	182
9	8398	8580	8761	8943	9124	9306	9487	9668	9849	*0030	181
240	38 0211	0392	0573	0754	0934	1115	1296	1476	1656	1837	181
1	2017	2197	2377	2557	2737	2917	3097	3277	3456	3636	180
2	3815	3995	4174	4353	4533	4712	4891	5070	5249	5428	179
3	5606	5785	5964	6142	6321	6499	6677	6856	7034	7212	178
4	7390	7568	7746	7923	8101	8279	8456	8634	8811	8989	178
245	38 9166	9343	9520	9698	9875	*0051	*0228	*0405	*0582	*0759	177
6	39 0935	1112	1288	1464	1641	1817	1993	2169	2345	2521	176
7	2697	2873	3048	3224	3400	3575	3751	3926	4101	4277	176
8	4452	4627	4802	4977	5152	5326	5501	5676	5850	6025	175
9	6199	6374	6548	6722	6896	7071	7245	7419	7592	7766	174

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
198	19,8	39,6	59,4	79,2	99,0	118,8	138,6	158,4	178,2
197	19,7	39,4	59,1	78,8	98,5	118,2	137,9	157,6	177,3
196	19,6	39,2	58,8	78,4	98,0	117,6	137,2	156,8	176,4
195	19,5	39,0	58,5	78,0	97,5	117,0	136,5	156,0	175,5
194	19,4	38,8	58,2	77,6	97,0	116,4	135,8	155,2	174,6
193	19,3	38,6	57,9	77,2	96,5	115,8	135,1	154,4	173,7
192	19,2	38,4	57,6	76,8	96,0	115,2	134,4	153,6	172,8
191	19,1	38,2	57,3	76,4	95,5	114,6	133,7	152,8	171,9
190	19,0	38,0	57,0	76,0	95,0	114,0	133,0	152,0	171,0
189	18,9	37,8	56,7	75,6	94,5	113,4	132,3	151,2	170,1
188	18,8	37,6	56,4	75,2	94,0	112,8	131,6	150,4	169,2
187	18,7	37,4	56,1	74,8	93,5	112,2	130,9	149,6	168,3
186	18,6	37,2	55,8	74,4	93,0	111,6	130,2	148,8	167,4
185	18,5	37,0	55,5	74,0	92,5	111,0	129,5	148,0	166,5
184	18,4	36,8	55,2	73,6	92,0	110,4	128,8	147,2	165,6
183	18,3	36,6	54,9	73,2	91,5	109,8	128,1	146,4	164,7
182	18,2	36,4	54,6	72,8	91,0	109,2	127,4	145,6	163,8
181	18,1	36,2	54,3	72,4	90,5	108,6	126,7	144,8	162,9
180	18,0	36,0	54,0	72,0	90,0	108,0	126,0	144,0	162,0
179	17,9	35,8	53,7	71,6	89,5	107,4	125,3	143,2	161,1
178	17,8	35,6	53,4	71,2	89,0	106,8	124,6	142,4	160,2
177	17,7	35,4	53,1	70,8	88,5	106,2	123,9	141,6	159,3
176	17,6	35,2	52,8	70,4	88,0	105,6	123,2	140,8	158,4
175	17,5	35,0	52,5	70,0	87,5	105,0	122,5	140,0	157,5
174	17,4	34,8	52,2	69,6	87,0	104,4	121,8	139,2	156,6
173	17,3	34,6	51,9	69,2	86,5	103,8	121,1	138,4	155,7

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
250	39 7940	8114	8287	8461	8634	8808	8981	9154	9328	9501	173
1	9674	9847	*0020	*0192	*0365	*0538	*0711	*0883	*1056	*1228	173
2	40 1401	1573	1745	1917	2089	2261	2433	2605	2777	2949	172
3	3121	3292	3464	3635	3807	3978	4149	4320	4492	4663	171
4	4834	5005	5176	5346	5517	5688	5858	6029	6199	6370	171
255	40 6540	6710	6881	7051	7221	7391	7561	7731	7901	8070	170
6	8240	8410	8579	8749	8918	9087	9257	9426	9595	9764	169
7	9933	*0102	*0271	*0440	*0609	*0777	*0946	*1114	*1283	*1451	169
8	41 1620	1788	1956	2124	2293	2461	2629	2796	2964	3132	168
9	3300	3467	3635	3803	3970	4137	4305	4472	4639	4806	167
260	41 4973	5140	5307	5474	5641	5808	5974	6141	6308	6474	167
1	6641	6807	6973	7139	7306	7472	7638	7804	7970	8135	166
2	8301	8467	8633	8798	8964	9129	9295	9460	9625	9791	165
3	9956	*0121	*0286	*0451	*0616	*0781	*0945	*1110	*1275	*1439	165
4	42 1604	1768	1933	2097	2261	2426	2590	2754	2918	3082	164
265	42 3246	3410	3574	3737	3901	4065	4228	4392	4555	4718	164
6	4882	5045	5208	5371	5534	5697	5860	6023	6186	6349	163
7	6511	6674	6836	6999	7161	7324	7486	7648	7811	7973	162
8	8135	8297	8459	8621	8783	8944	9106	9268	9429	9591	162
9	9752	9914	*0075	*0236	*0398	*0559	*0720	*0881	*1042	*1203	161
270	43 1364	1525	1685	1846	2007	2167	2328	2488	2649	2809	161
1	2969	3130	3290	3450	3610	3770	3930	4090	4249	4409	160
2	4569	4729	4888	5048	5207	5367	5526	5685	5844	6004	159
3	6163	6322	6481	6640	6799	6957	7116	7275	7433	7592	159
4	7751	7909	8067	8226	8384	8542	8701	8859	9017	9175	158
275	43 9333	9491	9648	9806	9964	*0122	*0279	*0437	*0594	*0752	158
6	44 0909	1066	1224	1381	1538	1695	1852	2009	2166	2323	157
7	2480	2637	2793	2950	3106	3263	3419	3576	3732	3889	157
8	4045	4201	4357	4513	4669	4825	4981	5137	5293	5449	156
9	5604	5760	5915	6071	6226	6382	6537	6692	6848	7003	155

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
174	17.4	34.8	52.2	69.6	87.0	104.4	121.8	139,2	156,6
173	17.3	34.6	51.9	69.2	86.5	103.8	121.1	138,4	155.7
172	17.2	34.4	51.6	68.8	86.0	103.2	120.4	137,6	154,8
171	17,1	34.2	51.3	68.4	85,5	102,6	119,7	136,8	153,9
170	17.0	34.0	51.0	68.0	85.0	102.0	119.0	136.0	153.0
169	16.9	33.8	50.7	67.6	84.5	101.4	118.3	135.2	152,1
168	16.8	33.6	50.4	67.2	84.0	100.8	117.6	134.4	151.2
167	16.7	33.4	50,1	66.8	83.5	100.2	116.9	133.6	150,3
166	16.6	33.2	49.8	66.4	83.0	99.6	116,2	132.8	149.4
165	16.5	33.0	49.5	66.0	82.5	99.0	115.5	132.0	148.5
164	16.4	32.8	49.2	65.6	82.0	98.4	114.8	131.2	147,6
163	16.3	32.6	48.9	65.2	81.5	97.8	114.1	130.4	146.7
162	16.2	32.4	48.6	64.8	81.0	97.2	113.4	129.6	145.8
161	16.1	32.2	48.3	64.4	80.5	96.6	112.7	128.8	144.9
160	16.0	32.0	48.0	64.0	80.0	96.0	112.0	128.0	144.0
159	15.9	31.8	47.7	63.6	79.5	95.4	111.3	127.2	143,1
158	15.8	31.6	47.4	63.2	79.0	94.8	110.6	126.4	142.2
157	15.7	31.4	47.1	62.8	78.5	94.2	109.9	125.6	141.3
156	15.6	31.2	46.8	62.4	78.0	93.6	109.2	124.8	140.4
155	15.5	31.0	46.5	62.0	77.5	93.0	108.5	124.0	139.5

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
280	44 7158	7313	7468	7623	7778	7933	8088	8242	8397	8552	155
1	8706	8861	9015	9170	9324	9478	9633	9787	9941	*0095	154
2	45 0249	0403	0557	0711	0865	1018	1172	1326	1479	1633	154
3	1786	1940	2093	2247	2400	2553	2706	2859	3012	3165	153
4	3318	3471	3624	3777	3930	4082	4235	4387	4540	4692	153
285	45 4845	4997	5150	5302	5454	5606	5758	5910	6062	6214	152
6	6366	6518	6670	6821	6973	7125	7276	7428	7579	7731	152
7	7882	8033	8184	8336	8487	8638	8789	8940	9091	9242	151
8	9392	9543	9694	9845	9995	*0146	*0296	*0447	*0597	*0748	151
9	46 0898	1048	1198	1348	1499	1649	1799	1948	2098	2248	150
290	46 2398	2548	2697	2847	2997	3146	3296	3445	3594	3744	150
1	3893	4042	4191	4340	4490	4639	4788	4936	5085	5234	149
2	5383	5532	5680	5829	5977	6126	6274	6423	6571	6719	149
3	6868	7016	7164	7312	7460	7608	7756	7904	8052	8200	148
4	8347	8495	8643	8790	8938	9085	9233	9380	9527	9675	148
295	46 9822	9969	*0116	*0263	*0410	*0557	*0704	*0851	*0998	*1145	147
6	47 1292	1438	1585	1732	1878	2025	2171	2318	2464	2610	146
7	2756	2903	3049	3195	3341	3487	3633	3779	3925	4071	146
8	4216	4362	4508	4653	4799	4944	5090	5235	5381	5526	146
9	5671	5816	5962	6107	6252	6397	6542	6687	6832	6976	145
300	47 7121	7266	7411	7555	7700	7844	7989	8133	8278	8422	145
1	8566	8711	8855	8999	9143	9287	9431	9575	9719	9863	144
2	48 0007	0151	0294	0438	0582	0725	0869	1012	1156	1299	144
3	1443	1586	1729	1872	2016	2159	2302	2445	2588	2731	143
4	2874	3016	3159	3302	3445	3587	3730	3872	4015	4157	143
305	48 4300	4442	4585	4727	4869	5011	5153	5295	5437	5579	142
6	5721	5863	6005	6147	6289	6430	6572	6714	6855	6997	142
7	7138	7280	7421	7563	7704	7845	7986	8127	8269	8410	141
8	8551	8692	8833	8974	9114	9255	9396	9537	9677	9818	141
9	9958	*0099	*0239	*0380	*0520	*0661	*0801	*0941	*1081	*1222	140
310	49 1362	1502	1642	1782	1922	2062	2201	2341	2481	2621	140
1	2760	2900	3040	3179	3319	3458	3597	3737	3876	4015	139
2	4155	4294	4433	4572	4711	4850	4989	5128	5267	5406	139
3	5544	5683	5822	5960	6099	6238	6376	6515	6653	6791	139
4	6930	7068	7206	7344	7483	7621	7759	7897	8035	8173	138

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
155	15.5	31.0	46.5	62.0	77.5	93.0	108.5	124.0	139.5
154	15,4	30.8	46,2	61.6	77.0	92.4	107.8	123.2	138,6
153	15,3	30.6	45,9	61,2	76,5	91.8	107,1	122.4	137,7
152	15,2	30,4	45,6	60,8	76,0	91,2	106,4	121,6	136,8
151	15,1	30,2	45,3	60,4	75,5	90,6	105,7	120,8	135,9
150	15,0	30,0	45,0	60.0	75,0	90,0	105,0	120,0	135.0
149	14,9	29,8	44,7	59,6	74,5	89,4	104,3	119,2	134,1
148	14,8	29,6	44,4	59,2	74,0	88,8	103,6	118,4	133,2
147	14,7	29,4	44,1	58,8	73,5	88,2	102,9	117,6	132,3
146	14,6	29,2	43,8	58,4	73,0	87,6	102,2	116,8	131,4
145	14,5	29,0	43,5	58,0	72,5	87,0	101,5	116,0	130,5
144	14,4	28,8	43,2	57,6	72,0	86,4	100,8	115,2	129,6
143	14,3	28,6	42,9	57,2	71,5	85,8	100,1	114,4	128,7
142	14,2	28,4	42,6	56,8	71,0	85,2	99,4	113,6	127,8
141	14,1	28,2	42,3	56,4	70,5	84,6	98,7	112,8	126,9
140	14,0	28,0	42,0	56,0	70,0	84,0	98,0	112,0	126,0
139	13,9	27,8	41,7	55,6	69,5	83,4	97,3	111,2	125,1
138	13,8	27,6	41,4	55,2	69,0	82,8	96,6	110,4	124,2

TABLA I. Mantisas con seis decimales

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
315	49 8311	8448	8586	8724	8862	8999	9137	9275	9412	9550	138
6	9687	9824	9962	*0099	*0236	*0374	*0511	*0648	*0785	*0922	137
7	50 1059	1196	1333	1470	1607	1744	1880	2017	2154	2291	137
8	2427	2564	2700	2837	2973	3109	3246	3382	3518	3655	136
9	3791	3927	4063	4199	4335	4471	4607	4743	4878	5014	136
320	50 5150	5286	5421	5557	5693	5828	5964	6099	6234	6370	136
1	6505	6640	6776	6911	7046	7181	7316	7451	7586	7721	135
2	7856	7991	8126	8260	8395	8530	8664	8799	8934	9068	135
3	9203	9337	9471	9606	9740	9874	*0009	*0143	*0277	*0411	134
4	51 0545	0679	0813	0947	1081	1215	1349	1482	1616	1750	134
325	51 1883	2017	2151	2284	2418	2551	2684	2818	2951	3084	133
6	3218	3351	3484	3617	3750	3883	4016	4149	4282	4415	133
7	4548	4681	4813	4946	5079	5211	5344	5476	5609	5741	133
8	5874	6006	6139	6271	6403	6535	6668	6800	6932	7064	132
9	7196	7328	7460	7592	7724	7855	7987	8119	8251	8382	132
330	51 8514	8646	8777	8909	9040	9171	9303	9434	9566	9697	131
1	9828	9959	*0090	*0221	*0353	*0484	*0615	*0745	*0876	*1007	131
2	52 1138	1269	1400	1530	1661	1792	1922	2053	2183	2314	131
3	2444	2575	2705	2835	2966	3096	3226	3356	3486	3616	130
4	3746	3876	4006	4136	4266	4396	4526	4656	4785	4915	130
335	52 5045	5174	5304	5434	5563	5693	5822	5951	6081	6210	129
6	6339	6469	6598	6727	6856	6985	7114	7243	7372	7501	129
7	7630	7759	7888	8016	8145	8274	8402	8531	8660	8788	129
8	8917	9045	9174	9302	9430	9559	9687	9815	9943	*0072	128
9	53 0200	0328	0456	0584	0712	0840	0968	1096	1223	1351	128
340	53 1479	1607	1734	1862	1990	2117	2245	2372	2500	2627	128
1	2754	2882	3009	3136	3264	3391	3518	3645	3772	3899	127
2	4026	4153	4280	4407	4534	4661	4787	4914	5041	5167	127
3	5294	5421	5547	5674	5800	5927	6053	6180	6306	6432	126
4	6558	6685	6811	6937	7063	7189	7315	7441	7567	7693	126
345	53 7819	7945	8071	8197	8322	8448	8574	8699	8825	8951	126
6	9076	9202	9327	9452	9578	9703	9829	9954	*0079	*0204	125
7	54 0329	0455	0580	0705	0830	0955	1080	1205	1330	1454	125
8	1579	1704	1829	1953	2078	2203	2327	2452	2576	2701	125
9	2825	2950	3074	3199	3323	3447	3571	3696	3820	3944	124

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
138	13,8	27,6	41,4	55,2	69,0	82,8	96,6	110,4	124,2
137	13,7	27,4	41,1	54,8	68,5	82,2	95,9	109,6	123,3
136	13,6	27,2	40,8	54,4	68,0	81,6	95,2	108,8	122,4
135	13,5	27,0	40,5	54,0	67,5	81,0	94,5	108,0	121,5
134	13,4	26,8	40,2	53,6	67,0	80,4	93,8	107,2	120,6
133	13,3	26,6	39,9	53,2	66,5	79,8	93,1	106,4	119,7
132	13,2	26,4	39,6	52,8	66,0	79,2	92,4	105,6	118,8
131	13,1	26,2	39,3	52,4	65,5	78,6	91,7	104,8	117,9
130	13,0	26,0	39,0	52,0	65,0	78,0	91,0	104,0	117,0
129	12,9	25,8	38,7	51,6	64,5	77,4	90,3	103,2	116,1
128	12,8	25,6	38,4	51,2	64,0	76,8	89,6	102,4	115,2
127	12,7	25,4	38,1	50,8	63,5	76,2	88,9	101,6	114,3
126	12,6	25,2	37,8	50,4	63,0	75,6	88,2	100,8	113,4
125	12,5	25,0	37,5	50,0	62,5	75,0	87,5	100,0	112,5
124	12,4	24,8	37,2	49,6	62,0	74,4	86,8	99,2	111,6

TABLA I. Mantisas con seis decimales

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
350	54 4068	4192	4316	4440	4564	4688	4812	4936	5060	5183	124
1	5307	5431	5555	5678	5802	5925	6049	6172	6296	6419	124
2	6543	6666	6789	6913	7036	7159	7282	7405	7529	7652	123
3	7775	7898	8021	8144	8267	8389	8512	8635	8758	8881	123
4	9003	9126	9249	9371	9494	9616	9739	9861	9984	*0106	123
355	55 0228	0351	0473	0595	0717	0840	0962	1084	1206	1328	122
6	1450	1572	1694	1816	1938	2060	2181	2303	2425	2547	122
7	2668	2790	2911	3033	3155	3276	3398	3519	3640	3762	121
8	3883	4004	4126	4247	4368	4489	4610	4731	4852	4973	121
9	5094	5215	5336	5457	5578	5699	5820	5940	6061	6182	121
360	55 6303	6423	6544	6664	6785	6905	7026	7146	7267	7387	120
1	7507	7627	7748	7868	7988	8108	8228	8349	8469	8589	120
2	8709	8829	8948	9068	9188	9308	9428	9548	9667	9787	120
3	9907	*0026	*0146	*0265	*0385	*0504	*0624	*0743	*0863	*0982	119
4	56 1101	1221	1340	1459	1578	1698	1817	1936	2055	2174	119
365	56 2293	2412	2531	2650	2769	2887	3006	3125	3244	3362	119
6	3481	3600	3718	3837	3955	4074	4192	4311	4429	4548	119
7	4666	4784	4903	5021	5139	5257	5376	5494	5612	5730	118
8	5848	5966	6084	6202	6320	6437	6555	6673	6791	6909	118
9	7026	7144	7262	7379	7497	7614	7732	7849	7967	8084	118
370	56 8202	8319	8436	8554	8671	8788	8905	9023	9140	9257	117
1	9374	9491	9608	9725	9842	9959	*0076	*0193	*0309	*0426	117
2	57 0543	0660	0776	0893	1010	1126	1243	1359	1476	1592	117
3	1709	1825	1942	2058	2174	2291	2407	2523	2639	2755	116
4	2872	2988	3104	3220	3336	3452	3568	3684	3800	3915	116
375	57 4031	4147	4263	4379	4494	4610	4726	4841	4957	5072	116
6	5188	5303	5419	5534	5650	5765	5880	5996	6111	6226	115
7	6341	6457	6572	6687	6802	6917	7032	7147	7262	7377	
8	7492	7607	7722	7836	7951	8066	8181	8295	8410	8525	
9	8639	8754	8868	8983	9097	9212	9326	9441	9555	9669	114
380	57 9784	9898	*0012	*0126	*0241	*0355	*0469	*0583	*0697	*0811	
1	58 0925	1039	1153	1267	1381	1495	1608	1722	1836	1950	
2	2063	2177	2291	2404	2518	2631	2745	2858	2972	3085	
3	3199	3312	3426	3539	3652	3765	3879	3992	4105	4218	113
4	4331	4444	4557	4670	4783	4896	5009	5122	5235	5348	
385	58 5461	5574	5686	5799	5912	6024	6137	6250	6362	6475	
6	6587	6700	6812	6925	7037	7149	7262	7374	7486	7599	112
7	7711	7823	7935	8047	8160	8272	8384	8496	8608	8720	
8	8832	8944	9056	9167	9279	9391	9503	9615	9726	9838	
9	9950	*0061	*0173	*0284	*0396	*0507	*0619	*0730	*0842	*0953	

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
124	12,4	24,8	37,2	49,6	62,0	74,4	86,8	99,2	111,6
123	12,3	24,6	36,9	49,2	61,5	73,8	86,1	98,4	110,7
122	12,2	24,4	36,6	48,8	61,0	73,2	85,4	97,6	109,8
121	12,1	24,2	36,3	48,4	60,5	72,6	84,7	96,8	108,9
120	12,0	24,0	36,0	48,0	60,0	72,0	84,0	96,0	108,0
119	11,9	23,8	35,7	47,6	59,5	71,4	83,3	95,2	107,1
118	11,8	23,6	35,4	47,2	59,0	70,8	82,6	94,4	106,2
117	11,7	23,4	35,1	46,8	58,5	70,2	81,9	93,6	105,3
116	11,6	23,2	34,8	46,4	58,0	69,6	81,2	92,8	104,4
115	11,5	23,0	34,5	46,0	57,5	69,0	80,5	92,0	103,5
114	11,4	22,8	34,2	45,6	57,0	68,4	79,8	91,2	102,6
113	11,3	22,6	33,9	45,2	56,5	67,8	79,1	90,4	101,7
112	11,2	22,4	33,6	44,8	56,0	67,2	78,4	89,6	100,8
111	11,1	22,2	33,3	44,4	55,5	66,6	77,7	88,8	99,9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
390	59 1065	1176	1287	1399	1510	1621	1732	1843	1955	2066	111
1	2177	2288	2399	2510	2621	2732	2843	2954	3064	3175	
2	3286	3397	3508	3618	3729	3840	3950	4061	4171	4282	
3	4393	4503	4614	4724	4834	4945	5055	5165	5276	5386	110
4	5496	5606	5717	5827	5937	6047	6157	6267	6377	6487	
395	59 6597	6707	6817	6927	7037	7146	7256	7366	7476	7586	
6	7695	7805	7914	8024	8134	8243	8353	8462	8572	8681	
7	8791	8900	9009	9119	9228	9337	9446	9556	9665	9774	109
8	9883	9992	*0101	*0210	*0319	*0428	*0537	*0646	*0755	*0864	
9	60 0973	1082	1191	1299	1408	1517	1625	1734	1843	1951	
400	60 2060	2169	2277	2386	2494	2603	2711	2819	2928	3036	108
1	3144	3253	3361	3469	3577	3686	3794	3902	4010	4118	
2	4226	4334	4442	4550	4658	4766	4874	4982	5089	5197	
3	5305	5413	5521	5628	5736	5844	5951	6059	6166	6274	
4	6381	6489	6596	6704	6811	6919	7026	7133	7241	7348	107
405	60 7455	7562	7669	7777	7884	7991	8098	8205	8312	8419	
6	8526	8633	8740	8847	8954	9061	9167	9274	9381	9488	
7	9594	9701	9808	9914	*0021	*0128	*0234	*0341	*0447	*0554	
8	61 0660	0767	0873	0979	1086	1192	1298	1405	1511	1617	106
9	1723	1829	1936	2042	2148	2254	2360	2466	2572	2678	
410	61 2784	2890	2996	3102	3207	3313	3419	3525	3630	3736	
1	3842	3947	4053	4159	4264	4370	4475	4581	4686	4792	
2	4897	5003	5108	5213	5319	5424	5529	5634	5740	5845	105
3	5950	6055	6160	6265	6370	6476	6581	6686	6790	6895	
4	7000	7105	7210	7315	7420	7525	7629	7734	7839	7943	
415	61 8048	8153	8257	8362	8466	8571	8676	8780	8884	8989	
6	9093	9198	9302	9406	9511	9615	9719	9824	9928	*0032	104
7	62 0136	0240	0344	0448	0552	0656	0760	0864	0968	1072	
8	1176	1280	1384	1488	1592	1695	1799	1903	2007	2110	
9	2214	2318	2421	2525	2628	2732	2835	2939	3042	3146	
420	62 3249	3353	3456	3559	3663	3766	3869	3973	4076	4179	103
1	4282	4385	4488	4591	4695	4798	4901	5004	5107	5210	
2	5312	5415	5518	5621	5724	5827	5929	6032	6135	6238	
3	6340	6443	6546	6648	6751	6853	6956	7058	7161	7263	
4	7366	7468	7571	7673	7775	7878	7980	8082	8185	8287	102
425	62 8389	8491	8593	8695	8797	8900	9002	9104	9206	9308	
6	9410	9512	9613	9715	9817	9919	*0021	*0123	*0224	*0326	
7	63 0428	0530	0631	0733	0835	0936	1038	1139	1241	1342	
8	1444	1545	1647	1748	1849	1951	2052	2153	2255	2356	101
9	2457	2559	2660	2761	2862	2963	3064	3165	3266	3367	

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
112	11,2	22,4	33,6	44,8	56,0	67,2	78,4	89,6	100,8
111	11,1	22,2	33,3	44,4	55,5	66,6	77,7	88,8	99,9
110	11,0	22,0	33,0	44,0	55,0	66,0	77,0	88,0	99,0
109	10,9	21,8	32,7	43,6	54,5	65,4	76,3	87,2	98,1
108	10,8	21,6	32,4	43,2	54,0	64,8	75,6	86,4	97,2
107	10,7	21,4	32,1	42,8	53,5	64,2	74,9	85,6	96,3
106	10,6	21,2	31,8	42,4	53,0	63,6	74,2	84,8	95,4
105	10,5	21,0	31,5	42,0	52,5	63,0	73,5	84,0	94,5
104	10,4	20,8	31,2	41,6	52,0	62,4	72,8	83,2	93,6
103	10,3	20,6	30,9	41,2	51,5	61,8	72,1	82,4	92,7
102	10,2	20,4	30,6	40,8	51,0	61,2	71,4	81,6	91,8
101	10,1	20,2	30,3	40,4	50,5	60,6	70,7	80,8	90,9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
430	63 3468	3569	3670	3771	3872	3973	4074	4175	4276	4376	101
1	4477	4578	4679	4779	4880	4981	5081	5182	5283	5383	100
2	5484	5584	5685	5785	5886	5986	6087	6187	6287	6388	
3	6488	6588	6688	6789	6889	6989	7089	7189	7290	7390	
4	7490	7590	7690	7790	7890	7990	8090	8190	8290	8389	
435	63 8489	8589	8689	8789	8888	8988	9088	9188	9287	9387	
6	9486	9586	9686	9785	9885	9984	*0084	*0183	*0283	*0382	
7	64 0481	0581	0680	0779	0879	0978	1077	1177	1276	1375	99
8	1474	1573	1672	1771	1871	1970	2069	2168	2267	2366	
9	2465	2563	2662	2761	2860	2959	3058	3156	3255	3354	
440	64 3453	3551	3650	3749	3847	3946	4044	4143	4242	4340	
1	4439	4537	4636	4734	4832	4931	5029	5127	5226	5324	98
2	5422	5521	5619	5717	5815	5913	6011	6110	6208	6306	
3	6404	6502	6600	6698	6796	6894	6992	7089	7187	7285	
4	7383	7481	7579	7676	7774	7872	7969	8067	8165	8262	
445	64 8360	8458	8555	8653	8750	8848	8945	9043	9140	9237	
6	9335	9432	9530	9627	9724	9821	9919	*0016	*0113	*0210	97
7	65 0308	0405	0502	0599	0696	0793	0890	0987	1084	1181	
8	1278	1375	1472	1569	1666	1762	1859	1956	2053	2150	
9	2246	2343	2440	2536	2633	2730	2826	2923	3019	3116	
450	65 3213	3309	3405	3502	3598	3695	3791	3888	3984	4080	96
1	4177	4273	4369	4465	4562	4658	4754	4850	4946	5042	
2	5138	5235	5331	5427	5523	5619	5715	5810	5906	6002	
3	6098	6194	6290	6386	6482	6577	6673	6769	6864	6960	
4	7056	7152	7247	7343	7438	7534	7629	7725	7820	7916	
455	65 8011	8107	8202	8298	8393	8488	8584	8679	8774	8870	95
6	8965	9060	9155	9250	9346	9441	9536	9631	9726	9821	
7	9916	*0011	*0106	*0201	*0296	*0391	*0486	*0581	*0676	*0771	
8	66 0865	0960	1055	1150	1245	1339	1434	1529	1623	1718	
9	1813	1907	2002	2096	2191	2286	2380	2475	2569	2663	
460	66 2758	2852	2947	3041	3135	3230	3324	3418	3512	3607	94
1	3701	3795	3889	3983	4078	4172	4266	4360	4454	4548	
2	4642	4736	4830	4924	5018	5112	5206	5299	5393	5487	
3	5581	5675	5769	5862	5956	6050	6143	6237	6331	6424	
4	6518	6612	6705	6799	6892	6986	7079	7173	7266	7360	
465	66 7453	7546	7640	7733	7826	7920	8013	8106	8199	8293	93
6	8386	8479	8572	8665	8759	8852	8945	9038	9131	9224	
7	9317	9410	9503	9596	9689	9782	9875	9967	*0060	*0153	
8	67 0246	0339	0431	0524	0617	0710	0802	0895	0988	1080	
9	1173	1265	1358	1451	1543	1636	1728	1821	1913	2005	

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
101	10,1	20,2	30,3	40,4	50,5	60,6	70,7	80,8	90,9
100	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0
99	9,9	19,8	29,7	39,6	49,5	59,4	69,3	79,2	89,1
98	9,8	19,6	29,4	39,2	49,0	58,8	68,6	78,4	88,2
97	9,7	19,4	29,1	38,8	48,5	58,2	67,9	77,6	87,3
96	9,6	19,2	28,8	38,4	48,0	57,6	67,2	76,8	86,4
95	9,5	19,0	28,5	38,0	47,5	57,0	66,5	76,0	85,5
94	9,4	18,8	28,2	37,6	47,0	56,4	65,8	75,2	84,6
93	9,3	18,6	27,9	37,2	46,5	55,8	65,1	74,4	83,7
92	9,2	18,4	27,6	36,8	46,0	55,2	64,4	73,6	82,8

TABLA I. Mantisas con seis decimales

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
470	67 2098	2190	2283	2375	2467	2560	2652	2744	2836	2929	92
1	3021	3113	3205	3297	3390	3482	3574	3666	3758	3850	
2	3942	4034	4126	4218	4310	4402	4494	4586	4677	4769	
3	4861	4953	5045	5137	5228	5320	5412	5503	5595	5687	
4	5778	5870	5962	6053	6145	6236	6328	6419	6511	6602	
475	67 6694	6785	6876	6968	7059	7151	7242	7333	7424	7516	91
6	7607	7698	7789	7881	7972	8063	8154	8245	8336	8427	
7	8518	8609	8700	8791	8882	8973	9064	9155	9246	9337	
8	9428	9519	9610	9700	9791	9882	9973	*0063	*0154	*0245	
9	68 0336	0426	0517	0607	0698	0789	0879	0970	1060	1151	
480	68 1241	1332	1422	1513	1603	1693	1784	1874	1964	2055	90
1	2145	2235	2326	2416	2506	2596	2686	2777	2867	2957	
2	3047	3137	3227	3317	3407	3497	3587	3677	3767	3857	
3	3947	4037	4127	4217	4307	4396	4486	4576	4666	4756	
4	4845	4935	5025	5114	5204	5294	5383	5473	5563	5652	
485	68 5742	5831	5921	6010	6100	6189	6279	6368	6458	6547	89
6	6636	6726	6815	6904	6994	7083	7172	7261	7351	7440	
7	7529	7618	7707	7796	7886	7975	8064	8153	8242	8331	
8	8420	8509	8598	8687	8776	8865	8953	9042	9131	9220	
9	9309	9398	9486	9575	9664	9753	9841	9930	*0019	*0107	
490	69 0196	0285	0373	0462	0550	0639	0728	0816	0905	0993	
1	1081	1170	1258	1347	1435	1524	1612	1700	1789	1877	88
2	1965	2053	2142	2230	2318	2406	2494	2583	2671	2759	
3	2847	2935	3023	3111	3199	3287	3375	3463	3551	3639	
4	3727	3815	3903	3991	4078	4166	4254	4342	4430	4517	
495	69 4605	4693	4781	4868	4956	5044	5131	5219	5307	5394	
6	5482	5569	5657	5744	5832	5919	6007	6094	6182	6269	87
7	6356	6444	6531	6618	6706	6793	6880	6968	7055	7142	
8	7229	7317	7404	7491	7578	7665	7752	7839	7926	8014	
9	8101	8188	8275	8362	8449	8535	8622	8709	8796	8883	
500	69 8970	9057	9144	9231	9317	9404	9491	9578	9664	9751	
1	9838	9924	*0011	*0098	*0184	*0271	*0358	*0444	*0531	*0617	
2	70 0704	0790	0877	0963	1050	1136	1222	1309	1395	1482	86
3	1568	1654	1741	1827	1913	1999	2086	2172	2258	2344	
4	2431	2517	2603	2689	2775	2861	2947	3033	3119	3205	
505	70 3291	3377	3463	3549	3635	3721	3807	3893	3979	4065	
6	4151	4236	4322	4408	4494	4579	4665	4751	4837	4922	
7	5008	5094	5179	5265	5350	5436	5522	5607	5693	5778	
8	5864	5949	6035	6120	6206	6291	6376	6462	6547	6632	85
9	6718	6803	6888	6974	7059	7144	7229	7315	7400	7485	
510	70 7570	7655	7740	7826	7911	7996	8081	8166	8251	8336	
1	8421	8506	8591	8676	8761	8846	8931	9015	9100	9185	
2	9270	9355	9440	9524	9609	9694	9779	9863	9948	*0033	
3	71 0117	0202	0287	0371	0456	0540	0625	0710	0794	0879	
4	0963	1048	1132	1217	1301	1385	1470	1554	1639	1723	84

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
93	9,3	18,6	27,9	37,2	46,5	55,8	65,1	74,4	83,7
92	9,2	18,4	27,6	36,8	46,0	55,2	64,4	73,6	82,8
91	9,1	18,2	27,3	36,4	45,5	54,6	63,7	72,8	81,9
90	9,0	18,0	27,0	36,0	45,0	54,0	63,0	72,0	81,0
89	8,9	17,8	26,7	35,6	44,5	53,4	62,3	71,2	80,1
88	8,8	17,6	26,4	35,2	44,0	52,8	61,6	70,4	79,2
87	8,7	17,4	26,1	34,8	43,5	52,2	60,9	69,6	78,3
86	8,6	17,2	25,8	34,4	43,0	51,6	60,2	68,8	77,4
85	8,5	17,0	25,5	34,0	42,5	51,0	59,5	68,0	76,5
84	8,4	16,8	25,2	33,6	42,0	50,4	58,8	67,2	75,6

TABLA I. Mantisas con seis decimales

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
515	71 1807	1892	1976	2060	2144	2229	2313	2397	2481	2566	84
6	2650	2734	2818	2902	2986	3070	3154	3238	3323	3407	
7	3491	3575	3659	3742	3826	3910	3994	4078	4162	4246	
8	4330	4414	4497	4581	4665	4749	4833	4916	5000	5084	
9	5167	5251	5335	5418	5502	5586	5669	5753	5836	5920	
520	71 6003	6087	6170	6254	6337	6421	6504	6588	6671	6754	83
1	6838	6921	7004	7088	7171	7254	7338	7421	7504	7587	
2	7671	7754	7837	7920	8003	8086	8169	8253	8336	8419	
3	8502	8585	8668	8751	8834	8917	9000	9083	9165	9248	
4	9331	9414	9497	9580	9663	9745	9828	9911	9994	*0077	
525	72 0159	0242	0325	0407	0490	0573	0655	0738	0821	0903	
6	0986	1068	1151	1233	1316	1398	1481	1563	1646	1728	82
7	1811	1893	1975	2058	2140	2222	2305	2387	2469	2552	
8	2634	2716	2798	2881	2963	3045	3127	3209	3291	3374	
9	3456	3538	3620	3702	3784	3866	3948	4030	4112	4194	
530	72 4276	4358	4440	4522	4604	4685	4767	4849	4931	5013	
1	5095	5176	5258	5340	5422	5503	5585	5667	5748	5830	
2	5912	5993	6075	6156	6238	6320	6401	6483	6564	6646	
3	6727	6809	6890	6972	7053	7134	7216	7297	7379	7460	81
4	7541	7623	7704	7785	7866	7948	8029	8110	8191	8273	
535	72 8354	8435	8516	8597	8678	8759	8841	8922	9003	9084	
6	9165	9246	9327	9408	9489	9570	9651	9732	9813	9893	
7	9974	*0055	*0136	*0217	*0298	*0378	*0459	*0540	*0621	*0702	
8	73 0782	0863	0944	1024	1105	1186	1266	1347	1428	1508	
9	1589	1669	1750	1830	1911	1991	2072	2152	2233	2313	
540	73 2394	2474	2555	2635	2715	2796	2876	2956	3037	3117	80
1	3197	3278	3358	3438	3518	3598	3679	3759	3839	3919	
2	3999	4079	4160	4240	4320	4400	4480	4560	4640	4720	
3	4800	4880	4960	5040	5120	5200	5279	5359	5439	5519	
4	5599	5679	5759	5838	5918	5998	6078	6157	6237	6317	
545	73 6397	6476	6556	6635	6715	6795	6874	6954	7034	7113	
6	7193	7272	7352	7431	7511	7590	7670	7749	7829	7908	79
7	7987	8067	8146	8225	8305	8384	8463	8543	8622	8701	
8	8781	8860	8939	9018	9097	9177	9256	9335	9414	9493	
9	9572	9651	9731	9810	9889	9968	*0047	*0126	*0205	*0284	
550	74 0363	0442	0521	0600	0678	0757	0836	0915	0994	1073	
1	1152	1230	1309	1388	1467	1546	1624	1703	1782	1860	
2	1939	2018	2096	2175	2254	2332	2411	2489	2568	2647	
3	2725	2804	2882	2961	3039	3118	3196	3275	3353	3431	78
4	3510	3588	3667	3745	3823	3902	3980	4058	4136	4215	

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
85	8,5	17,0	25,5	34,0	42,5	51,0	59,5	68,0	76,5
84	8,4	16,8	25,2	33,6	42,0	50,4	58,8	67,2	75,6
83	8,3	16,6	24,9	33,2	41,5	49,8	58,1	66,4	74,7
82	8,2	16,4	24,6	32,8	41,0	49,2	57,4	65,6	73,8
81	8,1	16,2	24,3	32,4	40,5	48,6	56,7	64,8	72,9
80	8,0	16,0	24,0	32,0	40,0	48,0	56,0	64,0	72,0
79	7,9	15,8	23,7	31,6	39,5	47,4	55,3	63,2	71,1
78	7,8	15,6	23,4	31,2	39,0	46,8	54,6	62,4	70,2

555	74 4293	4371	4449	4528	4606	4684	4762	4840	4919	4997	78
6	5075	5153	5231	5309	5387	5465	5543	5621	5699	5777	
7	5855	5933	6011	6089	6167	6245	6323	6401	6479	6556	
8	6634	6712	6790	6868	6945	7023	7101	7179	7256	7334	
9	7412	7489	7567	7645	7722	7800	7878	7955	8033	8110	
560	74 8188	8266	8343	8421	8498	8576	8653	8731	8808	8885	77
1	8963	9040	9118	9195	9272	9350	9427	9504	9582	9659	
2	9736	9814	9891	9968	*0045	*0123	*0200	*0277	*0354	*0431	
3	75 0508	0586	0663	0740	0817	0894	0971	1048	1125	1202	
4	1279	1356	1433	1510	1587	1664	1741	1818	1895	1972	
565	75 2048	2125	2202	2279	2356	2433	2509	2586	2663	2740	
6	2816	2893	2970	3047	3123	3200	3277	3353	3430	3506	
7	3583	3660	3736	3813	3889	3966	4042	4119	4195	4272	
8	4348	4425	4501	4578	4654	4730	4807	4883	4960	5036	76
9	5112	5189	5265	5341	5417	5494	5570	5646	5722	5799	
570	75 5875	5951	6027	6103	6180	6256	6332	6408	6484	6560	
1	6636	6712	6788	6864	6940	7016	7092	7168	7244	7320	
2	7396	7472	7548	7624	7700	7775	7851	7927	8003	8079	
3	8155	8230	8306	8382	8458	8533	8609	8685	8761	8836	
4	8912	8988	9063	9139	9214	9290	9366	9441	9517	9592	
575	75 9668	9743	9819	9894	9970	*0045	*0121	*0196	*0272	*0347	75
6	76 0422	0498	0573	0649	0724	0799	0875	0950	1025	1101	
7	1176	1251	1326	1402	1477	1552	1627	1702	1778	1853	
8	1928	2003	2078	2153	2228	2303	2378	2453	2529	2604	
9	2679	2754	2829	2904	2978	3053	3128	3203	3278	3353	
580	76 3428	3503	3578	3653	3727	3802	3877	3952	4027	4101	
1	4176	4251	4326	4400	4475	4550	4624	4699	4774	4848	
2	4923	4998	5072	5147	5221	5296	5370	5445	5520	5594	
3	5669	5743	5818	5892	5966	6041	6115	6190	6264	6338	74
4	6413	6487	6562	6636	6710	6785	6859	6933	7007	7082	
585	76 7156	7230	7304	7379	7453	7527	7601	7675	7749	7823	
6	7898	7972	8046	8120	8194	8268	8342	8416	8490	8564	
7	8638	8712	8786	8860	8934	9008	9082	9156	9230	9303	
8	9377	9451	9525	9599	9673	9746	9820	9894	9968	*0042	
9	77 0115	0189	0263	0336	0410	0484	0557	0631	0705	0778	
590	77 0852	0926	0999	1073	1146	1220	1293	1367	1440	1514	
1	1587	1661	1734	1808	1881	1955	2028	2102	2175	2248	73
2	2322	2395	2468	2542	2615	2688	2762	2835	2908	2981	
3	3055	3128	3201	3274	3348	3421	3494	3567	3640	3713	
4	3786	3860	3933	4006	4079	4152	4225	4298	4371	4444	
595	77 4517	4590	4663	4736	4809	4882	4955	5028	5100	5173	
6	5246	5319	5392	5465	5538	5610	5683	5756	5829	5902	
7	5974	6047	6120	6193	6265	6338	6411	6483	6556	6629	
8	6701	6774	6846	6919	6992	7064	7137	7209	7282	7354	
9	7427	7499	7572	7644	7717	7789	7862	7934	8006	8079	72

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
79	7,9	15,8	23,7	31,6	39,5	47,4	55,3	63,2	71,1
78	7,8	15,6	23,4	31,2	39,0	46,8	54,6	62,4	70,2
77	7,7	15,4	23,1	30,8	38,5	46,2	53,9	61,6	69,3
76	7,6	15,2	22,8	30,4	38,0	45,6	53,2	60,8	68,4
75	7,5	15,0	22,5	30,0	37,5	45,0	52,5	60,0	67,5
74	7,4	14,8	22,2	29,6	37,0	44,4	51,8	59,2	66,6
73	7,3	14,6	21,9	29,2	36,5	43,8	51,1	58,4	65,7
72	7,2	14,4	21,6	28,8	36,0	43,2	50,4	57,6	64,8

600	77 8151	8224	8296	8368	8441	8513	8585	8658	8730	8802	72
1	8874	8947	9019	9091	9163	9236	9308	9380	9452	9524	
2	9596	9669	9741	9813	9885	9957	*0029	*0101	*0173	*0245	
3	78 0317	0389	0461	0533	0605	0677	0749	0821	0893	0965	
4	1037	1109	1181	1253	1324	1396	1468	1540	1612	1684	
605	78 1755	1827	1899	1971	2042	2114	2186	2258	2329	2401	
6	2473	2544	2616	2688	2759	2831	2902	2974	3046	3117	
7	3189	3260	3332	3403	3475	3546	3618	3689	3761	3832	71
8	3904	3975	4046	4118	4189	4261	4332	4403	4475	4546	
9	4617	4689	4760	4831	4902	4974	5045	5116	5187	5259	
610	78 5330	5401	5472	5543	5615	5686	5757	5828	5899	5970	
1	6041	6112	6183	6254	6325	6396	6467	6538	6609	6680	
2	6751	6822	6893	6964	7035	7106	7177	7248	7319	7390	
3	7460	7531	7602	7673	7744	7815	7885	7956	8027	8098	
4	8168	8239	8310	8381	8451	8522	8593	8663	8734	8804	
615	78 8875	8946	9016	9087	9157	9228	9299	9369	9440	9510	
6	9581	9651	9722	9792	9863	9933	*0004	*0074	*0144	*0215	70
7	79 0285	0356	0426	0496	0567	0637	0707	0778	0848	0918	
8	0988	1059	1129	1199	1269	1340	1410	1480	1550	1620	
9	1691	1761	1831	1901	1971	2041	2111	2181	2252	2322	
620	79 2392	2462	2532	2602	2672	2742	2812	2882	2952	3022	
1	3092	3162	3231	3301	3371	3441	3511	3581	3651	3721	
2	3790	3860	3930	4000	4070	4139	4209	4279	4349	4418	
3	4488	4558	4627	4697	4767	4836	4906	4976	5045	5115	
4	5185	5254	5324	5393	5463	5532	5602	5672	5741	5811	
625	79 5880	5949	6019	6088	6158	6227	6297	6366	6436	6505	69
6	6574	6644	6713	6782	6852	6921	6990	7060	7129	7198	
7	7268	7337	7406	7475	7545	7614	7683	7752	7821	7890	
8	7960	8029	8098	8167	8236	8305	8374	8443	8513	8582	
9	8651	8720	8789	8858	8927	8996	9065	9134	9203	9272	
630	79 9341	9409	9478	9547	9616	9685	9754	9823	9892	9961	
1	80 0029	0098	0167	0236	0305	0373	0442	0511	0580	0648	
2	0717	0786	0854	0923	0992	1061	1129	1198	1266	1335	
3	1404	1472	1541	1609	1678	1747	1815	1884	1952	2021	
4	2089	2158	2226	2295	2363	2432	2500	2568	2637	2705	68
635	80 2774	2842	2910	2979	3047	3116	3184	3252	3321	3389	
6	3457	3525	3594	3662	3730	3798	3867	3935	4003	4071	
7	4139	4208	4276	4344	4412	4480	4548	4616	4685	4753	
8	4821	4889	4957	5025	5093	5161	5229	5297	5365	5433	
9	5501	5569	5637	5705	5773	5841	5908	5976	6044	6112	
640	80 6180	6248	6316	6384	6451	6519	6587	6655	6723	6790	
1	6858	6926	6994	7061	7129	7197	7264	7332	7400	7467	
2	7535	7603	7670	7738	7806	7873	7941	8008	8076	8143	
3	8211	8279	8346	8414	8481	8549	8616	8684	8751	8818	67
4	8886	8953	9021	9088	9156	9223	9290	9358	9425	9492	
645	80 9560	9627	9694	9762	9829	9896	9964	*0031	*0098	*0165	
6	81 0233	0300	0367	0434	0501	0569	0636	0703	0770	0837	
7	0904	0971	1039	1106	1173	1240	1307	1374	1441	1508	
8	1575	1642	1709	1776	1843	1910	1977	2044	2111	2178	
9	2245	2312	2379	2445	2512	2579	2646	2713	2780	2847	

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
73	7,3	14,6	21,9	29,2	36,5	43,8	51,1	58,4	65,7
72	7,2	14,4	21,6	28,8	36,0	43,2	50,4	57,6	64,8
71	7,1	14,2	21,3	28,4	35,5	42,6	49,7	56,8	63,9
70	7,0	14,0	21,0	28,0	35,0	42,0	49,0	56,0	63,0
69	6,9	13,8	20,7	27,6	34,5	41,4	48,3	55,2	62,1
68	6,8	13,6	20,4	27,2	34,0	40,8	47,6	54,4	61,2
67	6,7	13,4	20,1	26,8	33,5	40,2	46,9	53,6	60,3
66	6,6	13,2	19,8	26,4	33,0	39,6	46,2	52,8	59,4

TABLA I. Mantisas con seis decimales

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
650	81 2913	2980	3047	3114	3181	3247	3314	3381	3448	3514	67
1	3581	3648	3714	3781	3848	3914	3981	4048	4114	4181	
2	4248	4314	4381	4447	4514	4581	4647	4714	4780	4847	
3	4913	4980	5046	5113	5179	5246	5312	5378	5445	5511	66
4	5578	5644	5711	5777	5843	5910	5976	6042	6109	6175	
655	81 6241	6308	6374	6440	6506	6573	6639	6705	6771	6838	
6	6904	6970	7036	7102	7169	7235	7301	7367	7433	7499	
7	7565	7631	7698	7764	7830	7896	7962	8028	8094	8160	
8	8226	8292	8358	8424	8490	8556	8622	8688	8754	8820	
9	8885	8951	9017	9083	9149	9215	9281	9346	9412	9478	
660	81 9544	9610	9676	9741	9807	9873	9939	*0004	*0070	*0136	
1	82 0201	0267	0333	0399	0464	0530	0595	0661	0727	0792	
2	0858	0924	0989	1055	1120	1186	1251	1317	1382	1448	
3	1514	1579	1645	1710	1775	1841	1906	1972	2037	2103	65
4	2168	2233	2299	2364	2430	2495	2560	2626	2691	2756	
665	82 2822	2887	2952	3018	3083	3148	3213	3279	3344	3409	
6	3474	3539	3605	3670	3735	3800	3865	3930	3996	4061	
7	4126	4191	4256	4321	4386	4451	4516	4581	4646	4711	
8	4776	4841	4906	4971	5036	5101	5166	5231	5296	5361	
9	5426	5491	5556	5621	5686	5751	5815	5880	5945	6010	
670	82 6075	6140	6204	6269	6334	6399	6464	6528	6593	6658	
1	6723	6787	6852	6917	6981	7046	7111	7175	7240	7305	
2	7369	7434	7499	7563	7628	7692	7757	7821	7886	7951	
3	8015	8080	8144	8209	8273	8338	8402	8467	8531	8595	64
4	8660	8724	8789	8853	8918	8982	9046	9111	9175	9239	
675	82 9304	9368	9432	9497	9561	9625	9690	9754	9818	9882	
6	9947	*0011	*0075	*0139	*0204	*0268	*0332	*0396	*0460	*0525	
7	83 0589	0653	0717	0781	0845	0909	0973	1037	1102	1166	
8	1230	1294	1358	1422	1486	1550	1614	1678	1742	1806	
9	1870	1934	1998	2062	2126	2189	2253	2317	2381	2445	
680	83 2509	2573	2637	2700	2764	2828	2892	2956	3020	3083	
1	3147	3211	3275	3338	3402	3466	3530	3593	3657	3721	
2	3784	3848	3912	3975	4039	4103	4166	4230	4294	4357	
3	4421	4484	4548	4611	4675	4739	4802	4866	4929	4993	
4	5056	5120	5183	5247	5310	5373	5437	5500	5564	5627	63
685	83 5691	5754	5817	5881	5944	6007	6071	6134	6197	6261	
6	6324	6387	6451	6514	6577	6641	6704	6767	6830	6894	
7	6957	7020	7083	7146	7210	7273	7336	7399	7462	7525	
8	7588	7652	7715	7778	7841	7904	7967	8030	8093	8156	
9	8219	8282	8345	8408	8471	8534	8597	8660	8723	8786	
690	83 8849	8912	8975	9038	9101	9164	9227	9289	9352	9415	
1	9478	9541	9604	9667	9729	9792	9855	9918	9981	*0043	
2	84 0106	0169	0232	0294	0357	0420	0482	0545	0608	0671	
3	0733	0796	0859	0921	0984	1046	1109	1172	1234	1297	
4	1359	1422	1485	1547	1610	1672	1735	1797	1860	1922	
695	84 1985	2047	2110	2172	2235	2297	2360	2422	2484	2547	62
6	2609	2672	2734	2796	2859	2921	2983	3046	3108	3170	
7	3233	3295	3357	3420	3482	3544	3606	3669	3731	3793	
8	3855	3918	3980	4042	4104	4166	4229	4291	4353	4415	
9	4477	4539	4601	4664	4726	4788	4850	4912	4974	5036	

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
67	6.7	13.4	20.1	26.8	33.5	40.2	46.9	53.6	60.3
66	6.6	13.2	19.8	26.4	33.0	39.6	46.2	52.8	59.4
65	6,5	13,0	19,5	26,0	32,5	39,0	45,5	52,0	58,5
64	6,4	12,8	19,2	25,6	32,0	38,4	44,8	51,2	57,6
63	6,3	12,6	18,9	25,2	31,5	37,8	44,1	50,4	56,7
62	6,2	12,4	18,6	24,8	31,0	37,2	43,4	49,6	55,8

TABLA I. Mantisas con seis decimales

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
700	84 5098	5160	5222	5284	5346	5408	5470	5532	5594	5656	62
1	5718	5780	5842	5904	5966	6028	6090	6151	6213	6275	
2	6337	6399	6461	6523	6585	6646	6708	6770	6832	6894	
3	6955	7017	7079	7141	7202	7264	7326	7388	7449	7511	
4	7573	7634	7696	7758	7819	7881	7943	8004	8066	8128	
705	84 8189	8251	8312	8374	8435	8497	8559	8620	8682	8743	
6	8805	8866	8928	8989	9051	9112	9174	9235	9297	9358	61
7	9419	9481	9542	9604	9665	9726	9788	9849	9911	9972	
8	85 0033	0095	0156	0217	0279	0340	0401	0462	0524	0585	
9	0646	0707	0769	0830	0891	0952	1014	1075	1136	1197	
710	85 1258	1320	1381	1442	1503	1564	1625	1686	1747	1809	
1	1870	1931	1992	2053	2114	2175	2236	2297	2358	2419	
2	2480	2541	2602	2663	2724	2785	2846	2907	2968	3029	
3	3090	3150	3211	3272	3333	3394	3455	3516	3577	3637	
4	3698	3759	3820	3881	3941	4002	4063	4124	4185	4245	
715	85 4306	4367	4428	4488	4549	4610	4670	4731	4792	4852	
6	4913	4974	5034	5095	5156	5216	5277	5337	5398	5459	
7	5519	5580	5640	5701	5761	5822	5882	5943	6003	6064	
8	6124	6185	6245	6306	6366	6427	6487	6548	6608	6668	
9	6729	6789	6850	6910	6970	7031	7091	7152	7212	7272	60
720	85 7332	7393	7453	7513	7574	7634	7694	7755	7815	7875	
1	7935	7995	8056	8116	8176	8236	8297	8357	8417	8477	
2	8537	8597	8657	8718	8778	8838	8898	8958	9018	9078	
3	9138	9198	9258	9318	9379	9439	9499	9559	9619	9679	
4	9739	9799	9859	9918	9978	*0038	*0098	*0158	*0218	*0278	
725	86 0338	0398	0458	0518	0578	0637	0697	0757	0817	0877	
6	0937	0996	1056	1116	1176	1236	1295	1355	1415	1475	
7	1534	1594	1654	1714	1773	1833	1893	1952	2012	2072	
8	2131	2191	2251	2310	2370	2430	2489	2549	2608	2668	
9	2728	2787	2847	2906	2966	3025	3085	3144	3204	3263	
730	86 3323	3382	3442	3501	3561	3620	3680	3739	3799	3858	59
1	3917	3977	4036	4096	4155	4214	4274	4333	4392	4452	
2	4511	4570	4630	4689	4748	4808	4867	4926	4985	5045	
3	5104	5163	5222	5282	5341	5400	5459	5519	5578	5637	
4	5696	5755	5814	5874	5933	5992	6051	6110	6169	6228	
735	86 6287	6346	6405	6465	6524	6583	6642	6701	6760	6819	
6	6878	6937	6996	7055	7114	7173	7232	7291	7350	7409	
7	7467	7526	7585	7644	7703	7762	7821	7880	7939	7998	
8	8056	8115	8174	8233	8292	8350	8409	8468	8527	8586	
9	8644	8703	8762	8821	8879	8938	8997	9056	9114	9173	
740	86 9232	9290	9349	9408	9466	9525	9584	9642	9701	9760	
1	9818	9877	9935	9994	0053	*0111	*0170	*0228	*0287	0345	
2	87 0404	0462	0521	0579	0638	0696	0755	0813	0872	0930	58
3	0989	1047	1106	1164	1223	1281	1339	1398	1456	1515	
4	1573	1631	1690	1748	1806	1865	1923	1981	2040	2098	
745	87 2156	2215	2273	2331	2389	2448	2506	2564	2622	2681	
6	2739	2797	2855	2913	2972	3030	3088	3146	3204	3262	
7	3321	3379	3437	3495	3553	3611	3669	3727	3785	3844	
8	3902	3960	4018	4076	4134	4192	4250	4308	4366	4424	
9	4482	4540	4598	4656	4714	4772	4830	4888	4945	5003	

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
62	6,2	12,4	18,6	24,8	31,0	37,2	43,4	49,6	55,8
61	6,1	12,2	18,3	24,4	30,5	36,6	42,7	48,8	54,9
60	6,0	12,0	18,0	24,0	30,0	36,0	42,0	48,0	54,0
59	5,9	11,8	17,7	23,6	29,5	35,4	41,3	47,2	53,1
58	5,8	11,6	17,4	23,2	29,0	34,8	40,6	46,4	52,2
57	5,7	11,4	17,1	22,8	28,5	34,2	39,9	45,6	51,3

1	5640	5698	5756	5813	5871	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
2	6218	6276	6333	6391	6449	6507	6564	6622	6680	6737	
3	6795	6853	6910	6968	7026	7083	7141	7199	7256	7314	
4	7371	7429	7487	7544	7602	7659	7717	7774	7832	7889	
755	87 7947	8004	8062	8119	8177	8234	8292	8349	8407	8464	57
6	8522	8579	8637	8694	8752	8809	8866	8924	8981	9039	
7	9096	9153	9211	9268	9325	9383	9440	9497	9555	9612	
8	9669	9726	9784	9841	9898	9956	*0013	*0070	*0127	*0185	
9	88 0242	0299	0356	0413	0471	0528	0585	0642	0699	0756	
760	88 0814	0871	0928	0985	1042	1099	1156	1213	1271	1328	
1	1385	1442	1499	1556	1613	1670	1727	1784	1841	1898	
2	1955	2012	2069	2126	2183	2240	2297	2354	2411	2468	
3	2525	2581	2638	2695	2752	2809	2866	2923	2980	3037	
4	3093	3150	3207	3264	3321	3377	3434	3491	3548	3605	
765	88 3661	3718	3775	3832	3888	3945	4002	4059	4115	4172	
6	4229	4285	4342	4399	4455	4512	4569	4625	4682	4739	
7	4795	4852	4909	4965	5022	5078	5135	5192	5248	5305	
8	5361	5418	5474	5531	5587	5644	5700	5757	5813	5870	
9	5926	5983	6039	6096	6152	6209	6265	6321	6378	6434	56
770	88 6491	6547	6604	6660	6716	6773	6829	6885	6942	6998	
1	7054	7111	7167	7223	7280	7336	7392	7449	7505	7561	
2	7617	7674	7730	7786	7842	7898	7955	8011	8067	8123	
3	8179	8236	8292	8348	8404	8460	8516	8573	8629	8685	
4	8741	8797	8853	8909	8965	9021	9077	9134	9190	9246	
775	88 9302	9358	9414	9470	9526	9582	9638	9694	9750	9806	
6	9862	9918	9974	*0030	*0086	*0141	*0197	*0253	*0309	*0365	
7	89 0421	0477	0533	0589	0645	0700	0756	0812	0868	0924	
8	0980	1035	1091	1147	1203	1259	1314	1370	1426	1482	
9	1537	1593	1649	1705	1760	1816	1872	1928	1983	2039	
780	89 2095	2150	2206	2262	2317	2373	2429	2484	2540	2595	
1	2651	2707	2762	2818	2873	2929	2985	3040	3096	3151	
2	3207	3262	3318	3373	3429	3484	3540	3595	3651	3706	
3	3762	3817	3873	3928	3984	4039	4094	4150	4205	4261	55
4	4316	4371	4427	4482	4538	4593	4648	4704	4759	4814	
785	89 4870	4925	4980	5036	5091	5146	5201	5257	5312	5367	
6	5423	5478	5533	5588	5644	5699	5754	5809	5864	5920	
7	5975	6030	6085	6140	6195	6251	6306	6361	6416	6471	
8	6526	6581	6636	6692	6747	6802	6857	6912	6967	7022	
9	7077	7132	7187	7242	7297	7352	7407	7462	7517	7572	
790	89 7627	7682	7737	7792	7847	7902	7957	8012	8067	8122	
1	8176	8231	8286	8341	8396	8451	8506	8561	8615	8670	
2	8725	8780	8835	8890	8944	8999	9054	9109	9164	9218	
3	9273	9328	9383	9437	9492	9547	9602	9656	9711	9766	
4	9821	9875	9930	9985	*0039	*0094	*0149	*0203	*0258	*0312	
795	90 0367	0422	0476	0531	0586	0640	0695	0749	0804	0859	
6	0913	0968	1022	1077	1131	1186	1240	1295	1349	1404	
7	1458	1513	1567	1622	1676	1731	1785	1840	1894	1948	54
8	2003	2057	2112	2166	2221	2275	2329	2384	2438	2492	
9	2547	2601	2655	2710	2764	2818	2873	2927	2981	3036	

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
58	5,8	11,6	17,4	23,2	29,0	34,8	40,6	46,4	52,2
57	5,7	11,4	17,1	22,8	28,5	34,2	39,9	45,6	51,3
56	5,6	11,2	16,8	22,4	28,0	33,6	39,2	44,8	50,4
55	5,5	11,0	16,5	22,0	27,5	33,0	38,5	44,0	49,5
54	5,4	10,8	16,2	21,6	27,0	32,4	37,8	43,2	48,6

2	4174	4229	4283	4337	4391	4445	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
3	4716	4770	4824	4878	4932	4986	5040	5094	5148	5202	
4	5256	5310	5364	5418	5472	5526	5580	5634	5688	5742	
805	90 5796	5850	5904	5958	6012	6066	6119	6173	6227	6281	
6	6335	6389	6443	6497	6551	6604	6658	6712	6766	6820	
7	6874	6927	6981	7035	7089	7143	7196	7250	7304	7358	
8	7411	7465	7519	7573	7626	7680	7734	7787	7841	7895	
9	7949	8002	8056	8110	8163	8217	8270	8324	8378	8431	
810	90 8485	8539	8592	8646	8699	8753	8807	8860	8914	8967	
1	9021	9074	9128	9181	9235	9289	9342	9396	9449	9503	
2	9556	9610	9663	9716	9770	9823	9877	9930	9984	*0037	53
3	91 0091	0144	0197	0251	0304	0358	0411	0464	0518	0571	
4	0624	0678	0731	0784	0838	0891	0944	0998	1051	1104	
815	91 1158	1211	1264	1317	1371	1424	1477	1530	1584	1637	
6	1690	1743	1797	1850	1903	1956	2009	2063	2116	2169	
7	2222	2275	2328	2381	2435	2488	2541	2594	2647	2700	
8	2753	2806	2859	2913	2966	3019	3072	3125	3178	3231	
9	3284	3337	3390	3443	3496	3549	3602	3655	3708	3761	
820	91 3814	3867	3920	3973	4026	4079	4132	4184	4237	4290	
1	4343	4396	4449	4502	4555	4608	4660	4713	4766	4819	
2	4872	4925	4977	5030	5083	5136	5189	5241	5294	5347	
3	5400	5453	5505	5558	5611	5664	5716	5769	5822	5875	
4	5927	5980	6033	6085	6138	6191	6243	6296	6349	6401	
825	91 6454	6507	6559	6612	6664	6717	6770	6822	6875	6927	
6	6980	7033	7085	7138	7190	7243	7295	7348	7400	7453	
7	7506	7558	7611	7663	7716	7768	7820	7873	7925	7978	52
8	8030	8083	8135	8188	8240	8293	8345	8397	8450	8502	
9	8555	8607	8659	8712	8764	8816	8869	8921	8973	9026	
830	91 9078	9130	9183	9235	9287	9340	9392	9444	9496	9549	
1	9601	9653	9706	9758	9810	9862	9914	9967	*0019	*0071	
2	92 0123	0176	0228	0280	0332	0384	0436	0489	0541	0593	
3	0645	0697	0749	0801	0853	0906	0958	1010	1062	1114	
4	1166	1218	1270	1322	1374	1426	1478	1530	1582	1634	
835	92 1686	1738	1790	1842	1894	1946	1998	2050	2102	2154	
6	2206	2258	2310	2362	2414	2466	2518	2570	2622	2674	
7	2725	2777	2829	2881	2933	2985	3037	3089	3140	3192	
8	3244	3296	3348	3399	3451	3503	3555	3607	3658	3710	
9	3762	3814	3865	3917	3969	4021	4072	4124	4176	4228	
840	92 4279	4331	4383	4434	4486	4538	4589	4641	4693	4744	
1	4796	4848	4899	4951	5003	5054	5106	5157	5209	5261	
2	5312	5364	5415	5467	5518	5570	5621	5673	5725	5776	
3	5828	5879	5931	5982	6034	6085	6137	6188	6240	6291	51
4	6342	6394	6445	6497	6548	6600	6651	6702	6754	6805	
845	92 6857	6908	6959	7011	7062	7114	7165	7216	7268	7319	
6	7370	7422	7473	7524	7576	7627	7678	7730	7781	7832	
7	7883	7935	7986	8037	8088	8140	8191	8242	8293	8345	
8	8396	8447	8498	8549	8601	8652	8703	8754	8805	8857	
9	8908	8959	9010	9061	9112	9163	9215	9266	9317	9368	

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	5,5	11,0	16,5	22,0	27,5	33,0	38,5	44,0	49,5
54	5,4	10,8	16,2	21,6	27,0	32,4	37,8	43,2	48,6
53	5,3	10,6	15,9	21,2	26,5	31,8	37,1	42,4	47,7
52	5,2	10,4	15,6	20,8	26,0	31,2	36,4	41,6	46,8
51	5,1	10,2	15,3	20,4	25,5	30,6	35,7	40,8	45,9

TABLA I. Mantisas con seis decimales

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
850	92 9419	9470	9521	9572	9623	9674	9725	9776	9827	9879	51
1	9930	9981	*0032	*0083	*0134	*0185	*0236	*0287	*0338	*0389	
2	93 0440	0491	0542	0592	0643	0694	0745	0796	0847	0898	
3	0949	1000	1051	1102	1153	1204	1254	1305	1356	1407	
4	1458	1509	1560	1610	1661	1712	1763	1814	1865	1915	
855	93 1966	2017	2068	2118	2169	2220	2271	2322	2372	2423	
6	2474	2524	2575	2626	2677	2727	2778	2829	2879	2930	
7	2981	3031	3082	3133	3183	3234	3285	3335	3386	3437	
8	3487	3538	3589	3639	3690	3740	3791	3841	3892	3943	
9	3993	4044	4094	4145	4195	4246	4296	4347	4397	4448	
860	93 4498	4549	4599	4650	4700	4751	4801	4852	4902	4953	50
1	5003	5054	5104	5154	5205	5255	5306	5356	5406	5457	
2	5507	5558	5608	5658	5709	5759	5809	5860	5910	5960	
3	6011	6061	6111	6162	6212	6262	6313	6363	6413	6463	
4	6514	6564	6614	6665	6715	6765	6815	6865	6916	6966	
865	93 7016	7066	7117	7167	7217	7267	7317	7367	7418	7468	
6	7518	7568	7618	7668	7718	7769	7819	7869	7919	7969	
7	8019	8069	8119	8169	8219	8269	8320	8370	8420	8470	
8	8520	8570	8620	8670	8720	8770	8820	8870	8920	8970	
9	9020	9070	9120	9170	9220	9270	9320	9369	9419	9469	
870	93 9519	9569	9619	9669	9719	9769	9819	9869	9918	9968	
1	94 0018	0068	0118	0168	0218	0267	0317	0367	0417	0467	
2	0516	0566	0616	0666	0716	0765	0815	0865	0915	0964	
3	1014	1064	1114	1163	1213	1263	1313	1362	1412	1462	
4	1511	1561	1611	1660	1710	1760	1809	1859	1909	1958	
875	94 2008	2058	2107	2157	2207	2256	2306	2355	2405	2455	
6	2504	2554	2603	2653	2702	2752	2801	2851	2901	2950	
7	3000	3049	3099	3148	3198	3247	3297	3346	3396	3445	49
8	3495	3544	3593	3643	3692	3742	3791	3841	3890	3939	
9	3989	4038	4088	4137	4186	4236	4285	4335	4384	4433	
880	94 4483	4532	4581	4631	4680	4729	4779	4828	4877	4927	
1	4976	5025	5074	5124	5173	5222	5272	5321	5370	5419	
2	5469	5518	5567	5616	5665	5715	5764	5813	5862	5912	
3	5961	6010	6059	6108	6157	6207	6256	6305	6354	6403	
4	6452	6501	6551	6600	6649	6698	6747	6796	6845	6894	
885	94 6943	6992	7041	7090	7140	7189	7238	7287	7336	7385	
6	7434	7483	7532	7581	7630	7679	7728	7777	7826	7875	
7	7924	7973	8022	8070	8119	8168	8217	8266	8315	8364	
8	8413	8462	8511	8560	8609	8657	8706	8755	8804	8853	
9	8902	8951	8999	9048	9097	9146	9195	9244	9292	9341	
890	94 9390	9439	9488	9536	9585	9634	9683	9731	9780	9829	
1	9878	9926	9975	*0024	*0073	*0121	*0170	*0219	*0267	*0316	
2	95 0365	0414	0462	0511	0560	0608	0657	0706	0754	0803	
3	0851	0900	0949	0997	1046	1095	1143	1192	1240	1289	
4	1338	1386	1435	1483	1532	1580	1629	1677	1726	1775	
895	95 1823	1872	1920	1969	2017	2066	2114	2163	2211	2260	48
6	2308	2356	2405	2453	2502	2550	2599	2647	2696	2744	
7	2792	2841	2889	2938	2986	3034	3083	3131	3180	3228	
8	3276	3325	3373	3421	3470	3518	3566	3615	3663	3711	
9	3760	3808	3856	3905	3953	4001	4049	4098	4146	4194	

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
52	5,2	10,4	15,6	20,8	26,0	31,2	36,4	41,6	46,8
51	5,1	10,2	15,3	20,4	25,5	30,6	35,7	40,8	45,9
50	5,0	10,0	15,0	20,0	25,0	30,0	35,0	40,0	45,0
49	4,9	9,8	14,7	19,6	24,5	29,4	34,3	39,2	44,1
48	4,8	9,6	14,4	19,2	24,0	28,8	33,6	38,4	43,2

TABLA I. Mantisas con seis decimales

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
900	95 4243	4291	4339	4387	4435	4484	4532	4580	4628	4677	48
1	4725	4773	4821	4869	4918	4966	5014	5062	5110	5158	
2	5207	5255	5303	5351	5399	5447	5495	5543	5592	5640	
3	5688	5736	5784	5832	5880	5928	5976	6024	6072	6120	
4	6168	6216	6265	6313	6361	6409	6457	6505	6553	6601	
905	95 6649	6697	6745	6793	6840	6888	6936	6984	7032	7080	
6	7128	7176	7224	7272	7320	7368	7416	7464	7512	7559	
7	7607	7655	7703	7751	7799	7847	7894	7942	7990	8038	
8	8086	8134	8181	8229	8277	8325	8373	8421	8468	8516	
9	8564	8612	8659	8707	8755	8803	8850	8898	8946	8994	
910	95 9041	9089	9137	9185	9232	9280	9328	9375	9423	9471	
1	9518	9566	9614	9661	9709	9757	9804	9852	9900	9947	
2	9995	*0042	*0090	*0138	*0185	*0233	*0280	*0328	*0376	*0423	
3	96 0471	0518	0566	0613	0661	0709	0756	0804	0851	0899	
4	0946	0994	1041	1089	1136	1184	1231	1279	1326	1374	
915	96 1421	1469	1516	1563	1611	1658	1706	1753	1801	1848	47
6	1895	1943	1990	2038	2085	2132	2180	2227	2275	2322	
7	2369	2417	2464	2511	2559	2606	2653	2701	2748	2795	
8	2843	2890	2937	2985	3032	3079	3126	3174	3221	3268	
9	3316	3363	3410	3457	3504	3552	3599	3646	3693	3741	
920	96 3788	3835	3882	3929	3977	4024	4071	4118	4165	4212	
1	4260	4307	4354	4401	4448	4495	4542	4590	4637	4684	
2	4731	4778	4825	4872	4919	4966	5013	5061	5108	5155	
3	5202	5249	5296	5343	5390	5437	5484	5531	5578	5625	
4	5672	5719	5766	5813	5860	5907	5954	6001	6048	6095	
925	96 6142	6189	6236	6283	6329	6376	6423	6470	6517	6564	
6	6611	6658	6705	6752	6799	6845	6892	6939	6986	7033	
7	7080	7127	7173	7220	7267	7314	7361	7408	7454	7501	
8	7548	7595	7642	7688	7735	7782	7829	7875	7922	7969	
9	8016	8062	8109	8156	8203	8249	8296	8343	8390	8436	
930	96 8483	8530	8576	8623	8670	8716	8763	8810	8856	8903	
1	8950	8996	9043	9090	9136	9183	9229	9276	9323	9369	
2	9416	9463	9509	9556	9602	9649	9695	9742	9789	9835	
3	9882	9928	9975	*0021	*0068	*0114	*0161	*0207	*0254	*0300	
4	97 0347	0393	0440	0486	0533	0579	0626	0672	0719	0765	46
935	97 0812	0858	0904	0951	0997	1044	1090	1137	1183	1229	
6	1276	1322	1369	1415	1461	1508	1554	1601	1647	1693	
7	1740	1786	1832	1879	1925	1971	2018	2064	2110	2157	
8	2203	2249	2295	2342	2388	2434	2481	2527	2573	2619	
9	2666	2712	2758	2804	2851	2897	2943	2989	3035	3082	
940	97 3128	3174	3220	3266	3313	3359	3405	3451	3497	3543	
1	3590	3636	3682	3728	3774	3820	3866	3913	3959	4005	
2	4051	4097	4143	4189	4235	4281	4327	4374	4420	4466	
3	4512	4558	4604	4650	4696	4742	4788	4834	4880	4926	
4	4972	5018	5064	5110	5156	5202	5248	5294	5340	5386	
945	97 5432	5478	5524	5570	5616	5662	5707	5753	5799	5845	
6	5891	5937	5983	6029	6075	6121	6167	6212	6258	6304	
7	6350	6396	6442	6488	6533	6579	6625	6671	6717	6763	
8	6808	6854	6900	6946	6992	7037	7083	7129	7175	7220	
9	7266	7312	7358	7403	7449	7495	7541	7586	7632	7678	

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
49	4,9	9,8	14,7	19,6	24,5	29,4	34,3	39,2	44,1
48	4,8	9,6	14,4	19,2	24,0	28,8	33,6	38,4	43,2
47	4,7	9,4	14,1	18,8	23,5	28,2	32,9	37,6	42,3
46	4,6	9,2	13,8	18,4	23,0	27,6	32,2	36,8	41,4
45	4,5	9,0	13,5	18,0	22,5	27,0	31,5	36,0	40,5

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
950	97 7724	7769	7815	7861	7906	7952	7998	8043	8089	8135	46
1	8181	8226	8272	8317	8363	8409	8454	8500	8546	8591	
2	8637	8683	8728	8774	8819	8865	8911	8956	9002	9047	
3	9093	9138	9184	9230	9275	9321	9366	9412	9457	9503	
4	9548	9594	9639	9685	9730	9776	9821	9867	9912	9958	
955	98 0003	0049	0094	0140	0185	0231	0276	0322	0367	0412	45
6	0458	0503	0549	0594	0640	0685	0730	0776	0821	0867	
7	0912	0957	1003	1048	1093	1139	1184	1229	1275	1320	
8	1366	1411	1456	1501	1547	1592	1637	1683	1728	1773	
9	1819	1864	1909	1954	2000	2045	2090	2135	2181	2226	
960	98 2271	2316	2362	2407	2452	2497	2543	2588	2633	2678	
1	2723	2769	2814	2859	2904	2949	2994	3040	3085	3130	
2	3175	3220	3265	3310	3356	3401	3446	3491	3536	3581	
3	3626	3671	3716	3762	3807	3852	3897	3942	3987	4032	
4	4077	4122	4167	4212	4257	4302	4347	4392	4437	4482	
965	98 4527	4572	4617	4662	4707	4752	4797	4842	4887	4932	
6	4977	5022	5067	5112	5157	5202	5247	5292	5337	5382	
7	5426	5471	5516	5561	5606	5651	5696	5741	5786	5830	
8	5875	5920	5965	6010	6055	6100	6144	6189	6234	6279	
9	6324	6369	6413	6458	6503	6548	6593	6637	6682	6727	
970	98 6772	6817	6861	6906	6951	6996	7040	7085	7130	7175	
1	7219	7264	7309	7353	7398	7443	7488	7532	7577	7622	
2	7666	7711	7756	7800	7845	7890	7934	7979	8024	8068	
3	8113	8157	8202	8247	8291	8336	8381	8425	8470	8514	
4	8559	8604	8648	8693	8737	8782	8826	8871	8916	8960	
975	98 9005	9049	9094	9138	9183	9227	9272	9316	9361	9405	
6	9450	9494	9539	9583	9628	9672	9717	9761	9806	9850	44
7	9895	9939	9983	*0028	*0072	*0117	*0161	*0206	*0250	*0294	
8	99 0339	0383	0428	0472	0516	0561	0605	0650	0694	0738	
9	0783	0827	0871	0916	0960	1004	1049	1093	1137	1182	
980	99 1226	1270	1315	1359	1403	1448	1492	1536	1580	1625	
1	1669	1713	1758	1802	1846	1890	1935	1979	2023	2067	
2	2111	2156	2200	2244	2288	2333	2377	2421	2465	2509	
3	2554	2598	2642	2686	2730	2774	2819	2863	2907	2951	
4	2995	3039	3083	3127	3172	3216	3260	3304	3348	3392	
985	99 3436	3480	3524	3568	3613	3657	3701	3745	3789	3833	
6	3877	3921	3965	4009	4053	4097	4141	4185	4229	4273	
7	4317	4361	4405	4449	4493	4537	4581	4625	4669	4713	
8	4757	4801	4845	4889	4933	4977	5021	5065	5108	5152	
9	5196	5240	5284	5328	5372	5416	5460	5504	5547	5591	
990	99 5635	5679	5723	5767	5811	5854	5898	5942	5986	6030	
1	6074	6117	6161	6205	6249	6293	6337	6380	6424	6468	
2	6512	6555	6599	6643	6687	6731	6774	6818	6862	6906	
3	6949	6993	7037	7080	7124	7168	7212	7255	7299	7343	
4	7386	7430	7474	7517	7561	7605	7648	7692	7736	7779	
995	99 7823	7867	7910	7954	7998	8041	8085	8129	8172	8216	
6	8259	8303	8347	8390	8434	8477	8521	8564	8608	8652	
7	8695	8739	8782	8826	8869	8913	8956	9000	9043	9087	
8	9131	9174	9218	9261	9305	9348	9392	9435	9479	9522	
9	9565	9609	9652	9696	9739	9783	9826	9870	9913	9957	43

PARTES PROPORCIONALES

Dif.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	4,6	9,2	13,8	18,4	23,0	27,6	32,2	36,8	41,4
45	4,5	9,0	13,5	18,0	22,5	27,0	31,5	36,0	40,5
44	4,4	8,8	13,2	17,6	22,0	26,4	30,8	35,2	39,6
43	4,3	8,6	12,9	17,2	21,5	25,8	30,1	34,4	38,7

TABLA II. Mantisas con siete decimales

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
1000	000 0000	0434	0869	1303	1737	2171	2605	3039	3473	3907	434
1	4341	4775	5208	5642	6076	6510	6943	7377	7810	8244	434
2	8677	9111	9544	9977	*0411	*0844	*1277	*1710	*2143	*2576	433
3	001 3009	3442	3875	4308	4741	5174	5607	6039	6472	6905	433
4	7337	7770	8202	8635	9067	9499	9932	*0364	*0796	*1228	432
1005	002 1661	2093	2525	2957	3389	3821	1253	4685	5116	5548	432
6	5980	6411	6843	7275	7706	8138	8569	9001	9432	9863	431
7	003 0295	0726	1157	1588	2019	2451	2882	3313	3744	4174	431
8	4605	5036	5467	5898	6328	6759	7190	7620	8051	8481	431
9	8912	9342	9772	*0203	*0633	*1063	*1493	*1924	*2354	*2784	430
1010	004 3214	3644	4074	4504	4933	5363	5793	6223	6652	7082	430
1	7512	7941	8371	8800	9229	9659	*0088	*0517	*0947	*1376	429
2	005 1805	2234	2663	3092	3521	3950	4379	4808	5237	5666	429
3	6094	6523	6952	7380	7809	8238	8666	9094	9523	9951	429
4	006 0380	0808	1236	1664	2092	2521	2949	3377	3805	4233	428
1015	4660	5088	5516	5944	6372	6799	7227	7655	8082	8510	428
6	8937	9365	9792	*0219	*0647	*1074	*1501	*1928	*2355	*2782	427
7	007 3210	3637	4064	4490	4917	5344	5771	6198	6624	7051	427
8	7478	7904	8331	8757	9184	9610	*0037	*0463	*0889	*1316	426
9	008 1742	2168	2594	3020	3446	3872	4298	4724	5150	5576	426
1020	6002	6427	6853	7279	7704	8130	8556	8981	9407	9832	426
1	009 0257	0683	1108	1533	1959	2384	2809	3234	3659	4084	425
2	4509	4934	5359	5784	6208	6633	7058	7483	7907	8332	425
3	8756	9181	9605	*0030	*0454	*0878	*1303	*1727	*2151	*2575	424
4	010 3000	3424	3848	4272	4696	5120	5544	5967	6391	6815	424
1025	7239	7662	8086	8510	8933	9357	9780	*0204	*0627	*1050	424
6	011 1474	1897	2320	2743	3166	3590	4013	4436	4859	5282	423
7	5704	6127	6550	6973	7396	7818	8241	8664	9086	9509	423
8	9931	*0354	*0776	*1198	*1621	*2043	*2465	*2887	*3310	*3732	422
9	012 4154	4576	4998	5420	5842	6264	6685	7107	7529	7951	422
1030	8372	8794	9215	9637	*0059	*0480	*0901	*1323	*1744	*2165	422
1	013 2587	3008	3429	3850	4271	4692	5113	5534	5955	6376	421
2	6797	7218	7639	8059	8480	8901	9321	9742	*0162	*0583	421
3	014 1003	1424	1844	2264	2685	3105	3525	3945	4365	4785	420
4	5205	5625	6045	6465	6885	7305	7725	8144	8564	8984	420
1035	9403	9823	*0243	*0662	*1082	*1501	*1920	*2340	*2759	*3178	420
6	015 3598	4017	4436	4855	5274	5693	6112	6531	6950	7369	419
7	7788	8206	8625	9044	9462	9881	*0300	*0718	*1137	*1555	419
8	016 1974	2392	2810	3229	3647	4065	4483	4901	5319	5737	418
9	6155	6573	6991	7409	7827	8245	8663	9080	9498	9916	418
1040	017 0333	0751	1168	1586	2003	2421	2838	3256	3673	4090	417
1	4507	4924	5342	5759	6176	6593	7010	7427	7844	8260	417
2	8677	9094	9511	9927	*0344	*0761	*1177	*1594	*2010	*2427	417
3	018 2843	3259	3676	4092	4508	4925	5341	5757	6173	6589	416
4	7005	7421	7837	8253	8669	9084	9500	9916	*0332	*0747	416
1045	019 1163	1578	1994	2410	2825	3240	3656	4071	4486	4902	415
6	5317	5732	6147	6562	6977	7392	7807	8222	8637	9052	415
7	9467	9882	*0296	*0711	*1126	*1540	*1955	*2369	*2784	*3198	415
8	020 3613	4027	4442	4856	5270	5684	6099	6513	6927	7341	414
9	7755	8169	8583	8997	9411	9824	*0238	*0652	*1066	*1479	414

TABLA II. Mantisas con siete decimales

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
1050	021 1893	2307	2720	3134	3547	3961	4374	4787	5201	5614	413
1	6027	6440	6854	7267	7680	8093	8506	8919	9332	9745	413
2	022 0157	0570	0983	1396	1808	2221	2634	3046	3459	3871	413
3	4284	4696	5109	5521	5933	6345	6758	7170	7582	7994	412
4	8406	8818	9230	9642	*0054	*0466	*0878	*1289	*1701	*2113	412
1055	023 2525	2936	3348	3759	4171	4582	4994	5405	5817	6228	411
6	6639	7050	7462	7873	8284	8695	9106	9517	9928	*0339	411
7	024 0750	1161	1572	1982	2393	2804	3214	3625	4036	4446	411
8	4857	5267	5678	6088	6498	6909	7319	7729	8139	8549	410
9	8960	9370	9780	*0190	*0600	*1010	*1419	*1829	*2239	*2649	410
1060	025 3059	3468	3878	4288	4697	5107	5516	5926	6335	6744	410
1	7154	7563	7972	8382	8791	9200	9609	*0018	*0427	*0836	409
2	026 1245	1654	2063	2472	2881	3289	3698	4107	4515	4924	409
3	5333	5741	6150	6558	6967	7375	7783	8192	8600	9008	408
4	9416	9824	*0233	*0641	*1049	*1457	*1865	*2273	*2680	*3088	408
1065	027 3496	3904	4312	4719	5127	5535	5942	6350	6757	7165	408
6	7572	7979	8387	8794	9201	9609	*0016	*0423	*0830	*1237	407
7	028 1644	2051	2458	2865	3272	3679	4086	4492	4899	5306	407
8	5713	6119	6526	6932	7339	7745	8152	8558	8964	9371	406
9	9777	*0183	*0590	*0996	*1402	*1808	*2214	*2620	*3026	*3432	406
1070	029 3838	4244	4649	5055	5461	5867	6272	6678	7084	7489	406
1	7895	8300	8706	9111	9516	9922	*0327	*0732	*1138	*1543	405
2	030 1948	2353	2758	3163	3568	3973	4378	4783	5188	5592	405
3	5997	6402	6807	7211	7616	8020	8425	8830	9234	9638	405
4	031 0043	0447	0851	1256	1660	2064	2468	2872	3277	3681	404
1075	4085	4489	4893	5296	5700	6104	6508	6912	7315	7719	404
6	8123	8526	8930	9333	9737	*0140	*0544	*0947	*1350	*1754	403
7	032 2157	2560	2963	3367	3770	4173	4576	4979	5382	5785	403
8	6188	6590	6993	7396	7799	8201	8604	9007	9409	9812	403
9	033 0214	0617	1019	1422	1824	2226	2629	3031	3433	3835	402
1080	4238	4640	5042	5444	5846	6248	6650	7052	7453	7855	402
1	8257	8659	9060	9462	9864	*0265	*0667	*1068	*1470	*1871	402
2	034 2273	2674	3075	3477	3878	4279	4680	5081	5482	5884	401
3	6285	6686	7087	7487	7888	8289	8690	9091	9491	9892	401
4	035 0293	0693	1094	1495	1895	2296	2696	3096	3497	3897	400
1085	4297	4698	5098	5498	5898	6298	6698	7098	7498	7898	400
6	8298	8698	9098	9498	9898	*0297	*0697	*1097	*1496	*1896	400
7	036 2295	2695	3094	3494	3893	4293	4692	5091	5491	5890	399
8	6289	6688	7087	7486	7885	8284	8683	9082	9481	9880	399
9	037 0279	0678	1076	1475	1874	2272	2671	3070	3468	3867	399
1090	4265	4663	5062	5460	5858	6257	6655	7053	7451	7849	398
1	8248	8646	9044	9442	9839	*0237	*0635	*1033	*1431	*1829	398
2	038 2226	2624	3022	3419	3817	4214	4612	5009	5407	5804	398
3	6202	6599	6996	7393	7791	8188	8585	8982	9379	9776	397
4	039 0173	0570	0967	1364	1761	2158	2554	2951	3348	3745	397
1095	4141	4538	4934	5331	5727	6124	6520	6917	7313	7709	397
6	8106	8502	8898	9294	9690	*0086	*0482	*0878	*1274	*1670	396
7	040 2066	2462	2858	3254	3650	4045	4441	4837	5232	5628	396
8	6023	6419	6814	7210	7605	8001	8396	8791	9187	9582	395
9	9977	*0372	*0767	*1162	*1557	*1952	*2347	*2742	*3137	*3532	395

TABLA III.

Número de cada día del año a partir del 1o. de enero

Día del mes	ene.	feb.	mar.	abr.	may.	jun.	jul.	ago.	sep.	oct.	nov.	dic.	Día del mes
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29	..	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30	..	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31	..	90	...	151	...	212	243	...	304	...	365	31

Nota: En los años bisiestos, el número de cada día principiando el 1o. de marzo es mayor que el dado aquí.

$$s = (1 + i)^n$$

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
1	1,0025 0000	1,0033 3333	1,0041 6667	1,0050 0000	1,0058 3333	1,0066 6667	1
2	1,0050 0625	1,0066 7778	1,0083 5069	1,0100 2500	1,0117 0069	1,0133 7778	2
3	1,0075 1877	1,0100 3337	1,0125 5216	1,0150 7513	1,0176 0228	1,0201 3363	3
4	1,0100 3756	1,0134 0015	1,0167 7112	1,0201 5050	1,0235 3830	1,0269 3452	4
5	1,0125 6266	1,0167 7815	1,0210 0767	1,0252 5125	1,0295 0894	1,0337 8075	5
6	1,0150 9406	1,0201 6741	1,0252 6187	1,0303 7751	1,0355 1440	1,0406 7262	6
7	1,0176 3180	1,0235 6797	1,0295 3379	1,0355 2940	1,0415 5490	1,0476 1044	7
8	1,0201 7588	1,0269 7986	1,0338 2352	1,0407 0704	1,0476 3064	1,0545 9451	8
9	1,0227 2632	1,0304 0313	1,0381 3111	1,0459 1058	1,0537 4182	1,0616 2514	9
10	1,0252 8313	1,0338 3780	1,0424 5666	1,0511 4013	1,0598 8865	1,0687 0264	10
11	1,0278 4634	1,0372 8393	1,0468 0023	1,0563 9583	1,0660 7133	1,0758 2732	11
12	1,0304 1596	1,0407 4154	1,0511 6190	1,0616 7781	1,0722 9008	1,0829 9951	12
13	1,0329 9200	1,0442 1068	1,0555 4174	1,0669 8620	1,0785 4511	1,0902 1950	13
14	1,0355 7448	1,0476 9138	1,0599 3983	1,0723 2113	1,0848 3662	1,0974 8763	14
15	1,0381 6341	1,0511 8369	1,0643 5625	1,0776 8274	1,0911 6483	1,1048 0422	15
16	1,0407 5882	1,0546 8763	1,0687 9106	1,0830 7115	1,0975 2996	1,1121 6958	16
17	1,0433 6072	1,0582 0326	1,0732 4436	1,0884 8651	1,1039 3222	1,1195 8404	17
18	1,0459 6912	1,0617 3060	1,0777 1621	1,0939 2894	1,1103 7182	1,1270 4794	18
19	1,0485 8404	1,0652 6971	1,0822 0670	1,0993 9858	1,1168 4899	1,1345 6159	19
20	1,0512 0550	1,0688 2060	1,0867 1589	1,1048 9558	1,1233 6395	1,1421 2533	20
21	1,0538 3352	1,0723 8334	1,0912 4387	1,1104 2006	1,1299 1690	1,1497 3950	21
22	1,0564 6810	1,0759 5795	1,0957 9072	1,1159 7216	1,1365 0808	1,1574 0443	22
23	1,0591 0927	1,0795 4448	1,1003 5652	1,1215 5202	1,1431 3771	1,1651 2046	23
24	1,0617 5704	1,0831 4296	1,1049 4134	1,1271 5978	1,1498 0602	1,1728 8793	24
25	1,0644 1144	1,0867 5344	1,1095 4526	1,1327 9558	1,1565 1322	1,1807 0718	25
26	1,0670 7247	1,0903 7595	1,1141 6836	1,1384 5955	1,1632 5955	1,1885 7857	26
27	1,0697 4015	1,0940 1053	1,1188 1073	1,1441 5185	1,1700 4523	1,1965 0242	27
28	1,0724 1450	1,0976 5724	1,1234 7244	1,1498 7261	1,1768 7049	1,2044 7911	28
29	1,0750 9553	1,1013 1609	1,1281 5358	1,1556 2197	1,1837 3557	1,2125 0897	29
30	1,0777 8327	1,1049 8715	1,1328 5422	1,1614 0008	1,1906 4069	1,2205 9236	30
31	1,0804 7773	1,1086 7044	1,1375 7444	1,1672 0708	1,1975 8610	1,2287 2964	31
32	1,0831 7892	1,1123 6601	1,1423 1434	1,1730 4312	1,2045 7202	1,2369 2117	32
33	1,0858 8687	1,1160 7389	1,1470 7398	1,1789 0833	1,2115 9869	1,2451 6731	33
34	1,0886 0159	1,1197 9414	1,1518 5346	1,1848 0288	1,2186 6634	1,2534 6843	34
35	1,0913 2309	1,1235 2679	1,1566 5284	1,1907 2689	1,2257 7523	1,2618 2489	35
36	1,0940 5140	1,1272 7187	1,1614 7223	1,1966 8052	1,2329 2559	1,2702 3705	36
37	1,0967 8653	1,1310 2945	1,1663 1170	1,2026 6393	1,2401 1765	1,2787 0530	37
38	1,0995 2850	1,1347 9955	1,1711 7133	1,2086 7725	1,2473 5167	1,2872 3000	38
39	1,1022 7732	1,1385 8221	1,1760 5121	1,2147 2063	1,2546 2789	1,2958 1153	39
40	1,1050 3301	1,1423 7748	1,1809 5142	1,2207 9424	1,2619 4655	1,3044 5028	40
41	1,1077 9559	1,1461 8541	1,1858 7206	1,2268 9821	1,2693 0791	1,3131 4661	41
42	1,1105 6508	1,1500 0603	1,1908 1319	1,2330 3270	1,2767 1220	1,3219 0092	42
43	1,1133 4149	1,1538 3938	1,1957 7491	1,2391 9786	1,2841 5969	1,3307 1360	43
44	1,1161 2485	1,1576 8551	1,2007 5731	1,2453 9385	1,2916 5062	1,3395 8502	44
45	1,1189 1516	1,1615 4446	1,2057 6046	1,2516 2082	1,2991 8525	1,3485 1559	45
46	1,1217 1245	1,1654 1628	1,2107 8446	1,2578 7892	1,3067 6383	1,3575 0569	46
47	1,1245 1673	1,1693 0100	1,2158 2940	1,2641 6832	1,3143 8662	1,3665 5573	47
48	1,1273 2802	1,1731 9867	1,2208 9536	1,2704 8916	1,3220 5388	1,3756 6610	48
49	1,1301 4634	1,1771 0933	1,2259 8242	1,2768 4161	1,3297 6586	1,3848 3721	49
50	1,1329 7171	1,1810 3303	1,2310 9068	1,2832 2581	1,3375 2283	1,3940 6946	50

$s = (1 + i)^n$

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
51	1,1358 0414	1,1849 6981	1,2362 2022	1,2896 4194	1,3453 2504	1,4033 6325	51
52	1,1386 4365	1,1889 1971	1,2413 7114	1,2960 9015	1,3531 7277	1,4127 1901	52
53	1,1414 9026	1,1928 8277	1,2465 4352	1,3025 7060	1,3610 6628	1,4221 3713	53
54	1,1443 4398	1,1968 5905	1,2517 3745	1,3090 8346	1,3690 0583	1,4316 1805	54
55	1,1472 0484	1,2008 4858	1,2569 5302	1,3156 2887	1,3769 9170	1,4411 6217	55
56	1,1500 7285	1,2048 5141	1,2621 9033	1,3222 0702	1,3850 2415	1,4507 6992	56
57	1,1529 4804	1,2088 6758	1,2674 4946	1,3288 1805	1,3931 0346	1,4604 4172	57
58	1,1558 3041	1,2128 9714	1,2727 3050	1,3354 6214	1,4012 2990	1,4701 7799	58
59	1,1587 1998	1,2169 4013	1,2780 3354	1,3421 3946	1,4094 0374	1,4799 7918	59
60	1,1616 1678	1,2209 9659	1,2833 5868	1,3488 5015	1,4176 2526	1,4898 4571	60
61	1,1645 2082	1,2250 6658	1,2887 0601	1,3555 9440	1,4258 9474	1,4997 7801	61
62	1,1674 3213	1,2291 5014	1,2940 7561	1,3623 7238	1,4342 1246	1,5097 7653	62
63	1,1703 5071	1,2332 4730	1,2994 6760	1,3691 8424	1,4425 7870	1,5198 4171	63
64	1,1732 7658	1,2373 5813	1,3048 8204	1,3760 3016	1,4509 9374	1,5299 7399	64
65	1,1762 0977	1,2414 8266	1,3103 1905	1,3829 1031	1,4594 5787	1,5401 7381	65
66	1,1791 5030	1,2456 2093	1,3157 7872	1,3898 2486	1,4679 7138	1,5504 4164	66
67	1,1820 9817	1,2497 7300	1,3212 6113	1,3967 7399	1,4765 3454	1,5607 7792	67
68	1,1850 5342	1,2539 3891	1,3267 6638	1,4037 5785	1,4851 4766	1,5711 8310	68
69	1,1880 1605	1,2581 1871	1,3322 9458	1,4107 7664	1,4938 1102	1,5816 5766	69
70	1,1909 8609	1,2623 1244	1,3378 4580	1,4178 3053	1,5025 2492	1,5922 0204	70
71	1,1939 6356	1,2665 2015	1,3434 2016	1,4249 1968	1,5112 8965	1,6028 1672	71
72	1,1969 4847	1,2707 4188	1,3490 1774	1,4320 4428	1,5201 0550	1,6135 0217	72
73	1,1999 4084	1,2749 7769	1,3546 3865	1,4392 0450	1,5289 7279	1,6242 5885	73
74	1,2029 4069	1,2792 2761	1,3602 8298	1,4464 0052	1,5378 9179	1,6350 8724	74
75	1,2059 4804	1,2834 9170	1,3659 5082	1,4536 3252	1,5468 6283	1,6459 8782	75
76	1,2089 6291	1,2877 7001	1,3716 4229	1,4609 0069	1,5558 8620	1,6569 6107	76
77	1,2119 8532	1,2920 6258	1,3773 5746	1,4682 0519	1,5649 6220	1,6680 0748	77
78	1,2150 1528	1,2963 6945	1,3830 9645	1,4755 4622	1,5740 9115	1,6791 2753	78
79	1,2180 5282	1,3006 9068	1,3888 5935	1,4829 2395	1,5832 7334	1,6903 2172	79
80	1,2210 9795	1,3050 2632	1,3946 4627	1,4903 3857	1,5925 0910	1,7015 9053	80
81	1,2241 5070	1,3093 7641	1,4004 5729	1,4977 9026	1,6017 9874	1,7129 3446	81
82	1,2272 1108	1,3137 4099	1,4062 9253	1,5052 7921	1,6111 4257	1,7243 5403	82
83	1,2302 7910	1,3181 2013	1,4121 5209	1,5128 0561	1,6205 4090	1,7358 4972	83
84	1,2333 5480	1,3225 1386	1,4180 3605	1,5203 6964	1,6299 9405	1,7474 2205	84
85	1,2364 3819	1,3269 2224	1,4239 4454	1,5279 7148	1,6395 0235	1,7590 7153	85
86	1,2395 2928	1,3313 4532	1,4298 7764	1,5356 1134	1,6490 6612	1,7707 9868	86
87	1,2426 2811	1,3357 8314	1,4358 3546	1,5432 8940	1,6586 8567	1,7826 0400	87
88	1,2457 3468	1,3402 3575	1,4418 1811	1,5510 0585	1,6683 6134	1,7944 8803	88
89	1,2488 4901	1,3447 0320	1,4478 2568	1,5587 6087	1,6780 9344	1,8064 5128	89
90	1,2519 7114	1,3491 8554	1,4538 5829	1,5665 5468	1,6878 8232	1,8184 9429	90
91	1,2551 0106	1,3536 8283	1,4599 1603	1,5743 8745	1,6977 2830	1,8306 1758	91
92	1,2582 3882	1,3581 9510	1,4659 9902	1,5822 5939	1,7076 3172	1,8428 2170	92
93	1,2613 8441	1,3627 2242	1,4721 0735	1,5901 7069	1,7175 9290	1,8551 0718	93
94	1,2645 3787	1,3672 6483	1,4782 4113	1,5981 2154	1,7276 1219	1,8674 7456	94
95	1,2676 9922	1,3718 2238	1,4844 0047	1,6061 1215	1,7376 8993	1,8799 2439	95
96	1,2708 6847	1,3763 9512	1,4905 8547	1,6141 4271	1,7478 2646	1,8924 5722	96
97	1,2740 4564	1,3809 8310	1,4967 9624	1,6222 1342	1,7580 2211	1,9050 7360	97
98	1,2772 3075	1,3855 8638	1,5030 3289	1,6303 2449	1,7682 7724	1,9177 7409	98
99	1,2804 2383	1,3902 0500	1,5092 9553	1,6384 7611	1,7785 9219	1,9305 5925	99
100	1,2836 2489	1,3948 3902	1,5155 8426	1,6466 6849	1,7889 6731	1,9434 2965	100

$s = (1 + i)^n$

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
101	1,2868 3395	1,3994 8848	1,5218 9919	1,6549 0183	1,7994 0295	1,9563 8585	101
102	1,2900 5104	1,4041 5344	1,5282 4044	1,6631 7634	1,8098 9947	1,9694 2842	102
103	1,2932 7616	1,4088 3395	1,5346 0811	1,6714 9223	1,8204 5722	1,9825 5794	103
104	1,2965 0935	1,4135 3007	1,5410 0231	1,6798 4969	1,8310 7655	1,9957 7499	104
105	1,2997 5063	1,4182 4183	1,5474 2315	1,6882 4894	1,8417 5783	2,0090 8016	105
106	1,3030 0000	1,4229 6931	1,5538 7075	1,6966 9018	1,8525 0142	2,0224 7403	106
107	1,3062 5750	1,4277 1254	1,5603 4521	1,7051 7363	1,8633 0768	2,0359 5719	107
108	1,3095 2315	1,4324 7158	1,5668 4665	1,7136 9950	1,8741 7697	2,0495 3024	108
109	1,3127 9696	1,4372 4649	1,5733 7518	1,7222 6800	1,8851 0967	2,0631 9377	109
110	1,3160 7895	1,4420 3731	1,5799 3091	1,7308 7934	1,8961 0614	2,0769 4840	110
111	1,3193 6915	1,4468 4410	1,5865 1395	1,7395 3373	1,9071 6676	2,0907 9472	111
112	1,3226 6757	1,4516 6691	1,5931 2443	1,7482 3140	1,9182 9190	2,1047 3335	112
113	1,3259 7424	1,4565 0580	1,5997 6245	1,7569 7256	1,9294 8194	2,1187 6491	113
114	1,3292 8917	1,4613 6082	1,6064 2812	1,7657 5742	1,9407 3725	2,1328 9000	114
115	1,3326 1240	1,4662 3202	1,6131 2157	1,7745 8621	1,9520 5822	2,1471 0927	115
116	1,3359 4393	1,4711 1946	1,6198 4291	1,7834 5914	1,9634 4522	2,1614 2333	116
117	1,3392 8379	1,4760 2320	1,6265 9226	1,7923 7644	1,9748 9865	2,1758 3282	117
118	1,3426 3200	1,4809 4327	1,6333 6973	1,8013 3832	1,9864 1890	2,1903 3837	118
119	1,3459 8858	1,4858 7975	1,6401 7543	1,8103 4501	1,9980 0634	2,2049 4063	119
120	1,3493 5355	1,4908 3268	1,6470 0950	1,8193 9673	2,0096 6138	2,2196 4023	120
121	1,3527 2693	1,4958 0212	1,6538 7204	1,8284 9372	2,0213 8440	2,2344 3784	121
122	1,3561 0875	1,5007 8813	1,6607 6317	1,8376 3619	2,0331 7581	2,2493 3409	122
123	1,3594 9902	1,5057 9076	1,6676 8302	1,8468 2437	2,0450 3600	2,2643 2965	123
124	1,3628 9777	1,5108 1006	1,6746 3170	1,8560 5849	2,0569 6538	2,2794 2518	124
125	1,3663 0501	1,5158 4609	1,6816 0933	1,8653 3878	2,0689 6434	2,2946 2135	125
126	1,3697 2077	1,5208 9892	1,6886 1603	1,8746 6548	2,0810 3330	2,3099 1882	126
127	1,3731 4508	1,5259 6858	1,6956 5193	1,8840 3880	2,0931 7266	2,3253 1828	127
128	1,3765 7794	1,5310 5514	1,7027 1715	1,8934 5900	2,1053 8284	2,3408 2040	128
129	1,3800 1938	1,5361 5866	1,7098 1181	1,9029 2629	2,1176 6424	2,3564 2587	129
130	1,3834 6943	1,5412 7919	1,7169 3602	1,9124 4092	2,1300 1728	2,3721 3538	130
131	1,3869 2811	1,5464 1678	1,7240 8992	1,9220 0313	2,1424 4238	2,3879 4962	131
132	1,3903 9543	1,5516 7151	1,7312 7363	1,9316 1314	2,1549 3996	2,4038 6928	132
133	1,3938 7142	1,5567 4341	1,7384 8727	1,9412 7121	2,1675 1044	2,4198 9507	133
134	1,3973 5609	1,5619 3256	1,7457 3097	1,9509 7757	2,1801 5425	2,4360 2771	134
135	1,4008 4948	1,5671 3900	1,7530 0485	1,9607 3245	2,1928 7182	2,4522 6789	135
136	1,4043 5161	1,5723 6279	1,7603 0903	1,9705 3612	2,2056 6357	2,4686 1635	136
137	1,4078 6249	1,5776 0400	1,7676 4365	1,9803 8880	2,2185 2994	2,4850 7379	137
138	1,4113 8214	1,5828 6268	1,7750 0884	1,9902 9074	2,2314 7137	2,5016 4095	138
139	1,4149 1060	1,5881 3889	1,7824 0471	2,0002 4219	2,2444 8828	2,5183 1855	139
140	1,4184 4787	1,5934 3269	1,7898 3139	2,0102 4340	2,2575 8113	2,5351 0734	140
141	1,4219 9399	1,5987 4413	1,7972 8902	2,0202 9462	2,2707 5036	2,5520 0806	141
142	1,4255 4898	1,6040 7328	1,8047 7773	2,0303 9609	2,2839 9640	2,5690 2145	142
143	1,4291 1285	1,6094 2019	1,8122 9763	2,0405 4808	2,2973 1971	2,5861 4826	143
144	1,4326 8563	1,6147 8492	1,8198 4887	2,0507 5082	2,3107 2074	2,6033 8924	144
145	1,4362 6735	1,6201 6754	1,8274 3158	2,0610 0457	2,3241 9995	2,6207 4517	145
146	1,4398 5802	1,6255 6810	1,8350 4588	2,0713 0959	2,3377 5778	2,6382 1681	146
147	1,4434 5766	1,6309 8666	1,8426 9190	2,0816 6614	2,3513 9470	2,6558 0492	147
148	1,4470 6631	1,6364 2328	1,8503 6978	2,0920 7447	2,3651 1117	2,6735 1028	148
149	1,4506 8397	1,6418 7802	1,8580 7966	2,1025 3484	2,3789 0765	2,6913 3369	149
150	1,4543 1068	1,6473 5095	1,8658 2166	2,1130 4752	2,3927 8461	2,7092 7591	150

$$s = (1+i)^n$$

n	$\frac{3}{4}\%$	1%	$1\frac{1}{4}\%$	$1\frac{1}{2}\%$	$1\frac{3}{4}\%$	2%	n
1	1,0075 0000	1,0100 0000	1,0125 0000	1,0150 0000	1,0175 0000	1,0200 0000	1
2	1,0150 5625	1,0201 0000	1,0251 5625	1,0302 2500	1,0353 0625	1,0404 0000	2
3	1,0226 6917	1,0303 0100	1,0379 7070	1,0456 7838	1,0534 2411	1,0612 0800	3
4	1,0303 3919	1,0406 0401	1,0509 4534	1,0613 6355	1,0718 5903	1,0824 3216	4
5	1,0380 6673	1,0510 1005	1,0640 8215	1,0772 8400	1,0906 1656	1,1040 8080	5
6	1,0458 5224	1,0615 2015	1,0773 8318	1,0934 4326	1,1097 0235	1,1261 6242	6
7	1,0536 9613	1,0721 3535	1,0908 5047	1,1098 4491	1,1291 2215	1,1486 8567	7
8	1,0615 9885	1,0828 5671	1,1044 8610	1,1264 9259	1,1488 8178	1,1716 5938	8
9	1,0695 6084	1,0936 8527	1,1182 9218	1,1433 8998	1,1689 8721	1,1950 9257	9
10	1,0775 8255	1,1046 2213	1,1322 7083	1,1605 4083	1,1894 4449	1,2189 9442	10
11	1,0856 6441	1,1156 6835	1,1464 2422	1,1779 4894	1,2102 5977	1,2433 7431	11
12	1,0938 0690	1,1268 2503	1,1607 5452	1,1956 1817	1,2314 3931	1,2682 4179	12
13	1,1020 1045	1,1380 9328	1,1752 6395	1,2135 5244	1,2529 8950	1,2936 0663	13
14	1,1102 7553	1,1494 7421	1,1899 5475	1,2317 5573	1,2749 1682	1,3194 7876	14
15	1,1186 0259	1,1609 6896	1,2048 2918	1,2502 3207	1,2972 2786	1,3458 6834	15
16	1,1269 9211	1,1725 7864	1,2198 8955	1,2689 8555	1,3199 2935	1,3727 8571	16
17	1,1354 4455	1,1843 0443	1,2351 3817	1,2880 2033	1,3430 2811	1,4002 4142	17
18	1,1439 6039	1,1961 4748	1,2505 7739	1,3073 4064	1,3665 3111	1,4282 4625	18
19	1,1525 4009	1,2081 0895	1,2662 0961	1,3269 5075	1,3904 4540	1,4568 1117	19
20	1,1611 8414	1,2201 9004	1,2820 3723	1,3468 5501	1,4147 7820	1,4859 4740	20
21	1,1698 9302	1,2323 9194	1,2980 6270	1,3670 5783	1,4395 3681	1,5156 6634	21
22	1,1786 6722	1,2447 1586	1,3142 8848	1,3875 6370	1,4647 2871	1,5459 7967	22
23	1,1875 0723	1,2571 6302	1,3307 1709	1,4083 7715	1,4903 6146	1,5768 9926	23
24	1,1964 1353	1,2697 3465	1,3473 5105	1,4295 0281	1,5164 4279	1,6084 3725	24
25	1,2053 8663	1,2824 3200	1,3641 9294	1,4509 4535	1,5429 8054	1,6406 0599	25
26	1,2144 2703	1,2952 5631	1,3812 4535	1,4727 0953	1,5699 8269	1,6734 1811	26
27	1,2235 3523	1,3082 0888	1,3985 1092	1,4948 0018	1,5974 5739	1,7068 8648	27
28	1,2327 1175	1,3212 9097	1,4159 9230	1,5172 2218	1,6254 1290	1,7410 2421	28
29	1,2419 5709	1,3345 0388	1,4336 9221	1,5399 8051	1,6538 5762	1,7758 4469	29
30	1,2512 7176	1,3478 4892	1,4516 1336	1,5630 8022	1,6828 0013	1,8113 6158	30
31	1,2606 5630	1,3613 2740	1,4697 5853	1,5865 2642	1,7122 4913	1,8475 8882	31
32	1,2701 1122	1,3749 4068	1,4881 3051	1,6103 2432	1,7422 1349	1,8845 4059	32
33	1,2796 3706	1,3886 9009	1,5067 3214	1,6344 7918	1,7727 0223	1,9222 3140	33
34	1,2892 3434	1,4025 7699	1,5255 6629	1,6589 9637	1,8037 2452	1,9606 7603	34
35	1,2989 0359	1,4166 0276	1,5446 3587	1,6838 8132	1,8352 8970	1,9998 8955	35
36	1,3086 4537	1,4307 6878	1,5639 4382	1,7091 3954	1,8674 0727	2,0398 8734	36
37	1,3184 6021	1,4450 7647	1,5834 9312	1,7347 7663	1,9000 8689	2,0806 8509	37
38	1,3283 4866	1,4595 2724	1,6032 8678	1,7607 9828	1,9333 3841	2,1222 9879	38
39	1,3383 1128	1,4741 2251	1,6233 2787	1,7872 1025	1,9671 7184	2,1647 4477	39
40	1,3483 4861	1,4888 6373	1,6436 1946	1,8140 1841	2,0015 9734	2,2080 3966	40
41	1,3584 6123	1,5037 5237	1,6641 6471	1,8412 2868	2,0366 2530	2,2522 0046	41
42	1,3686 4969	1,5187 8989	1,6849 6677	1,8688 4712	2,0722 6624	2,2972 4447	42
43	1,3789 1456	1,5339 7779	1,7060 2885	1,8968 7982	2,1085 3090	2,3431 8936	43
44	1,3892 5642	1,5493 1757	1,7273 5421	1,9253 3302	2,1454 3019	2,3900 5314	44
45	1,3996 7584	1,5648 1075	1,7489 4614	1,9542 1301	2,1829 7522	2,4378 5421	45
46	1,4101 7341	1,5804 5885	1,7708 0797	1,9835 2621	2,2211 7728	2,4866 1129	46
47	1,4207 4971	1,5962 6344	1,7929 4306	2,0132 7910	2,2600 4789	2,5363 4351	47
48	1,4314 0533	1,6122 2608	1,8153 5485	2,0434 7829	2,2995 9872	2,5870 7039	48
49	1,4421 4087	1,6283 4834	1,8380 4679	2,0741 3046	2,3398 4170	2,6388 1179	49
50	1,4529 5693	1,6446 3182	1,8610 2237	2,1052 4242	2,3807 8893	2,6915 8803	50

$$s = (1+i)^n$$

n	$\frac{3}{4}\%$	1%	$1\frac{1}{4}\%$	$1\frac{1}{2}\%$	$1\frac{3}{4}\%$	2%	n
51	1,4638 5411	1,6610 7814	1,8842 8515	2,1368 2106	2,4224 5274	2,7454 1979	51
52	1,4748 3301	1,6776 8892	1,9078 3872	2,1688 7337	2,4648 4566	2,8003 2819	52
53	1,4858 9426	1,6944 6581	1,9316 8670	2,2014 0647	2,5079 8046	2,8563 3475	53
54	1,4970 3847	1,7114 1047	1,9558 3279	2,2344 2757	2,5518 7012	2,9134 6144	54
55	1,5082 6626	1,7285 2457	1,9802 8070	2,2679 4398	2,5965 2785	2,9717 3067	55
56	1,5195 7825	1,7458 0982	2,0050 3420	2,3019 6314	2,6419 6708	3,0311 6529	56
57	1,5309 7509	1,7632 6792	2,0300 9713	2,3364 9259	2,6882 0151	3,0917 8859	57
58	1,5424 5740	1,7809 0060	2,0554 7335	2,3715 3998	2,7352 4503	3,1536 2436	58
59	1,5540 2583	1,7987 0960	2,0811 6676	2,4071 1308	2,7831 1182	3,2166 9685	59
60	1,5656 8103	1,8166 9670	2,1071 8135	2,4432 1978	2,8318 1628	3,2810 3079	60
61	1,5774 2363	1,8348 6367	2,1335 2111	2,4798 6807	2,8813 7306	3,3466 5140	61
62	1,5892 5431	1,8532 1230	2,1601 9013	2,5170 6609	2,9317 9709	3,4135 8443	62
63	1,6011 7372	1,8717 4443	2,1871 9250	2,5548 2208	2,9831 0354	3,4818 5612	63
64	1,6131 8252	1,8904 6187	2,2145 3241	2,5931 4442	3,0343 0785	3,5514 9324	64
65	1,6252 8139	1,9093 6649	2,2422 1407	2,6320 4158	3,0884 2574	3,6225 2311	65
66	1,6374 7100	1,9284 6015	2,2702 4174	2,6715 2221	3,1424 7319	3,6949 7357	66
67	1,6497 5203	1,9477 4475	2,2986 1976	2,7115 9504	3,1974 6647	3,7688 7304	67
68	1,6621 2517	1,9672 2220	2,3273 5251	2,7522 6896	3,2534 2213	3,8442 5050	68
69	1,6745 9111	1,9868 9442	2,3564 4442	2,7935 5300	3,3103 5702	3,9211 3551	69
70	1,6871 5055	2,0067 6337	2,3858 9997	2,8354 5629	3,3682 8827	3,9995 5822	70
71	1,6998 0418	2,0268 3100	2,4157 2372	2,8779 8814	3,4272 3331	4,0795 4939	71
72	1,7125 5271	2,0470 9931	2,4459 2027	2,9211 5796	3,4872 0990	4,1611 4038	72
73	1,7253 9685	2,0675 7031	2,4764 9427	2,9649 7533	3,5482 3607	4,2443 6318	73
74	1,7383 3733	2,0882 4601	2,5074 5045	3,0094 4996	3,6103 3020	4,3292 5045	74
75	1,7513 7486	2,1091 2847	2,5387 9358	3,0545 9171	3,6735 1098	4,4158 3546	75
76	1,7645 1017	2,1302 1975	2,5705 2850	3,1004 1059	3,7377 9742	4,5041 5216	76
77	1,7777 4400	2,1515 2195	2,6026 6011	3,1469 1674	3,8032 0888	4,5942 3521	77
78	1,7910 7708	2,1730 3717	2,6351 9336	3,1941 2050	3,8697 6503	4,6861 1991	78
79	1,8045 1015	2,1947 6754	2,6681 3327	3,2420 3230	3,9374 8592	4,7798 4231	79
80	1,8180 4398	2,2167 1522	2,7014 8494	3,2906 6279	4,0063 9192	4,8754 3916	80
81	1,8316 7931	2,2388 8237	2,7352 5350	3,3400 2273	4,0765 0378	4,9729 4794	81
82	1,8454 1691	2,2612 7119	2,7694 4417	3,3901 2307	4,1478 4260	5,0724 0690	82
83	1,8592 5753	2,2838 8390	2,8040 6222	3,4409 7492	4,2204 2984	5,1738 5504	83
84	1,8732 0196	2,3067 2274	2,8391 1300	3,4925 8954	4,2942 8737	5,2773 3214	84
85	1,8872 5098	2,3297 8997	2,8746 0191	3,5449 7838	4,3694 3740	5,3828 7878	85
86	1,9014 0536	2,3530 8787	2,9105 3444	3,5981 5306	4,4459 0255	5,4905 3636	86
87	1,9156 6590	2,3766 1875	2,9469 1612	3,6521 2535	4,5237 0584	5,6003 4708	87
88	1,9300 3339	2,4003 8494	2,9837 5257	3,7069 0723	4,6028 7070	5,7123 5402	88
89	1,9445 0865	2,4243 8879	3,0210 4948	3,7625 1084	4,6834 2093	5,8266 0110	89
90	1,9590 9246	2,4486 3267	3,0588 1260	3,8189 4851	4,7653 8080	5,9431 3313	90
91	1,9737 8565	2,4731 1900	3,0970 4775	3,8762 3273	4,8487 7496	6,0619 9579	91
92	1,9885 8905	2,4978 5019	3,1357 6085	3,9343 7622	4,9336 2853	6,1832 3570	92
93	2,0035 0346	2,5228 2869	3,1749 5786	3,9933 9187	5,0199 6703	6,3069 0042	93
94	2,0185 2974	2,5480 5698	3,2146 4483	4,0532 9275	5,1078 1645	6,4330 3843	94
95	2,0336 6871	2,5735 3755	3,2548 2789	4,1140 9214	5,1972 0324	6,5616 9920	95
96	2,0489 2123	2,5992 7293	3,2955 1324	4,1758 0352	5,2881 5429	6,6929 3318	96
97	2,0642 8814	2,6252 6565	3,3367 0716	4,2384 4057	5,3806 9699	6,8267 9184	97
98	2,0797 7030	2,6515 1831	3,3784 1600	4,3020 1718	5,4748 5919	6,9633 2768	98
99	2,0953 6858	2,6780 3349	3,4206 4620	4,3665 4744	5,5706 6923	7,1025 9423	99
100	2,1110 8384	2,7048 1383	3,4634 0427	4,4320 4565	5,6681 5594	7,2446 4612	100

TABLA IV. Monto de 1 a interés compuesto

$$s = (1 + i)^n$$

n	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%	n
1	1,0250 0000	1,0300 0000	1,0350 0000	1,0400 0000	1,0450 0000	1,0500 0000	1
2	1,0506 2500	1,0609 0000	1,0712 2500	1,0816 0000	1,0920 2500	1,1025 0000	2
3	1,0768 9063	1,0927 2700	1,1087 1788	1,1248 6400	1,1411 6613	1,1576 2500	3
4	1,1038 1289	1,1255 0881	1,1475 2300	1,1698 5856	1,1925 1860	1,2155 0625	4
5	1,1314 0821	1,1592 7407	1,1876 8631	1,2166 5290	1,2461 8194	1,2762 8156	5
6	1,1596 9342	1,1940 5230	1,2292 5533	1,2653 1902	1,3022 6012	1,3400 9564	6
7	1,1886 8575	1,2298 7387	1,2722 7926	1,3159 3178	1,3608 6183	1,4071 0042	7
8	1,2184 0290	1,2667 7008	1,3168 0904	1,3685 6905	1,4221 0061	1,4774 5544	8
9	1,2488 6297	1,3047 7318	1,3628 9735	1,4233 1181	1,4860 9514	1,5513 2822	9
10	1,2800 8454	1,3439 1638	1,4105 9876	1,4802 4428	1,5529 6942	1,6288 9463	10
11	1,3120 8666	1,3842 3387	1,4599 6972	1,5394 5406	1,6228 5305	1,7103 3936	11
12	1,3448 8882	1,4257 6089	1,5110 6866	1,6010 3222	1,6958 8143	1,7958 5633	12
13	1,3785 1104	1,4685 3371	1,5639 5606	1,6650 7351	1,7721 9610	1,8856 4914	13
14	1,4129 7382	1,5125 8972	1,6186 9452	1,7316 7645	1,8519 4492	1,9799 3160	14
15	1,4482 9817	1,5579 6742	1,6753 4883	1,8009 4351	1,9352 8244	2,0789 2818	15
16	1,4845 0562	1,6047 0644	1,7339 8604	1,8729 8125	2,0223 7015	2,1828 7459	16
17	1,5216 1826	1,6528 4763	1,7946 7555	1,9479 0050	2,1133 7681	2,2920 1832	17
18	1,5596 5872	1,7024 3306	1,8574 8920	2,0258 1652	2,2084 7877	2,4066 1923	18
19	1,5986 5019	1,7535 0605	1,9225 0132	2,1068 4918	2,3078 6031	2,5269 5020	19
20	1,6386 1644	1,8061 1123	1,9897 8886	2,1911 2314	2,4117 1402	2,6532 9771	20
21	1,6795 8185	1,8602 9457	2,0594 3147	2,2787 6807	2,5202 4116	2,7859 6259	21
22	1,7215 7140	1,9161 0341	2,1315 1158	2,3699 1879	2,6336 5201	2,9252 6072	22
23	1,7646 1068	1,9735 8651	2,2061 1448	2,4647 1554	2,7521 6635	3,0715 2376	23
24	1,8087 2595	2,0327 9411	2,2833 2849	2,5633 0416	2,8760 1383	3,2250 9994	24
25	1,8539 4410	2,0937 7793	2,3632 4498	2,6658 3633	3,0054 3446	3,3863 5494	25
26	1,9002 9270	2,1565 9127	2,4459 5856	2,7724 6978	3,1406 7901	3,5556 7269	26
27	1,9478 0002	2,2212 8901	2,5315 6711	2,8833 6858	3,2820 0956	3,7334 5632	27
28	1,9964 9502	2,2879 2768	2,6201 7196	2,9987 0332	3,4296 9999	3,9201 2914	28
29	2,0464 0739	2,3565 6551	2,7118 7798	3,1186 5145	3,5840 3649	4,1161 3560	29
30	2,0975 6758	2,4272 6247	2,8067 9370	3,2433 9751	3,7453 1813	4,3219 4238	30
31	2,1500 0677	2,5000 8035	2,9050 3148	3,3731 3341	3,9138 5745	4,5380 3949	31
32	2,2037 5694	2,5750 8276	3,0067 0759	3,5080 5875	4,0899 8104	4,7649 4147	32
33	2,2588 5086	2,6523 3524	3,1119 4235	3,6483 8110	4,2740 3018	5,0031 8854	33
34	2,3153 2213	2,7319 0530	3,2208 6033	3,7943 1634	4,4663 6154	5,2533 4797	34
35	2,3732 0519	2,8138 6245	3,3335 9045	3,9460 8899	4,6673 4781	5,5160 1537	35
36	2,4325 3532	2,8982 7833	3,4502 6611	4,1039 3255	4,8773 7846	5,7918 1614	36
37	2,4933 4870	2,9852 2668	3,5710 2543	4,2680 8986	5,0968 6049	6,0814 0694	37
38	2,5556 8242	3,0747 8348	3,6960 1132	4,4388 1345	5,3262 1921	6,3854 7729	38
39	2,6195 7448	3,1670 2698	3,8253 7171	4,6163 6599	5,5658 9908	6,7047 5115	39
40	2,6850 6384	3,2620 3779	3,9592 5972	4,8010 2063	5,8163 6454	7,0399 8871	40
41	2,7521 9043	3,3598 9893	4,0978 3381	4,9930 6145	6,0781 0094	7,3919 8815	41
42	2,8209 9520	3,4606 9589	4,2412 5799	5,1927 8391	6,3516 1548	7,7615 8756	42
43	2,8915 2008	3,5645 1677	4,3897 0202	5,4004 9527	6,6374 3818	8,1496 6693	43
44	2,9638 0808	3,6714 5227	4,5433 4160	5,6165 1508	6,9361 2290	8,5571 5028	44
45	3,0379 0328	3,7815 9584	4,7023 5855	5,8411 7568	7,2482 4843	8,9850 0779	45
46	3,1138 5086	3,8950 4372	4,8669 4110	6,0748 2271	7,5744 1961	9,4342 5818	46
47	3,1916 9713	4,0118 9503	5,0372 8404	6,3178 1562	7,9152 6849	9,9059 7109	47
48	3,2714 8956	4,1322 5188	5,2135 8898	6,5705 2824	8,2714 5557	10,4012 6965	48
49	3,3532 7680	4,2562 1944	5,3960 6459	6,8333 4937	8,6436 7107	10,9213 3313	49
50	3,4371 0872	4,3839 0602	5,5849 2686	7,1066 8335	9,0326 3627	11,4673 9979	50

$$s = (1 + i)^n$$

n	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%	n
51	3,5230 3644	4,5154 2320	5,7803 9930	7,3909 5068	9,4391 0490	12,0407 6978	51
52	3,6111 1235	4,6508 8590	5,9827 1327	7,6865 8871	9,8638 6463	12,6428 0826	52
53	3,7013 9016	4,7904 1247	6,1921 0824	7,9940 5226	10,3077 3853	13,2749 4868	53
54	3,7939 2491	4,9341 2485	6,4088 3202	8,3138 1435	10,7715 8677	13,9386 9611	54
55	3,8887 7303	5,0821 4859	6,6331 4114	8,6463 6692	11,2563 0817	14,6356 3092	55
56	3,9859 9236	5,2346 1305	6,8653 0108	8,9922 2160	11,7628 4204	15,3674 1246	56
57	4,0856 4217	5,3916 5144	7,1055 8662	9,3519 1046	12,2921 6993	16,1357 8309	57
58	4,1877 8322	5,5534 0098	7,3542 8215	9,7259 8688	12,8453 1758	16,9425 7224	58
59	4,2924 7780	5,7200 0301	7,6116 8203	10,1150 2635	13,4233 5687	17,7897 0085	59
60	4,3997 8975	5,8916 0310	7,8780 9090	10,5196 2741	14,0274 0793	18,6791 8589	60
61	4,5097 8449	6,0683 5120	8,1538 2408	10,9404 1250	14,6586 4129	19,6131 4519	61
62	4,6225 2910	6,2504 0173	8,4392 0793	11,3780 2900	15,3182 8014	20,5938 0245	62
63	4,7380 9233	6,4379 1379	8,7345 8020	11,8331 5016	16,0076 0275	21,6234 9257	63
64	4,8565 4464	6,6310 5120	9,0402 9051	12,3064 7617	16,7279 4487	22,7046 6720	64
65	4,9779 5826	6,8299 8273	9,3567 0068	12,7987 3522	17,4807 0239	23,8399 0056	65
66	5,1024 0721	7,0348 8222	9,6841 8520	13,3106 8463	18,2673 3400	25,0318 9559	66
67	5,2299 6739	7,2459 2868	10,0231 3168	13,8431 1201	19,0893 6403	26,2834 9037	67
68	5,3607 1658	7,4633 0654	10,3739 4129	14,3968 3649	19,9483 8541	27,5976 6488	68
69	5,4947 3449	7,6872 0574	10,7370 2924	14,9727 0995	20,8460 6276	28,9775 4813	69
70	5,6321 0286	7,9178 2191	11,1128 2526	15,5716 1835	21,7841 3558	30,4264 2554	70
71	5,7729 0543	8,1553 5657	11,5017 7414	16,1944 8308	22,7644 2168	31,9477 4681	71
72	5,9172 2806	8,4000 1727	11,9043 3624	16,8422 6241	23,7888 2066	33,5451 3415	72
73	6,0651 5876	8,6520 1778	12,3209 8801	17,5159 5290	24,8593 1759	35,2223 9086	73
74	6,2167 8773	8,9115 7832	12,7522 2259	18,2165 9102	25,9779 8688	36,9835 1040	74
75	6,3722 0743	9,1789 2567	13,1985 5038	18,9452 5466	27,1469 9629	38,8326 8592	75
76	6,5315 1261	9,4542 9344	13,6604 9964	19,7030 6485	28,3686 1112	40,7743 2022	76
77	6,6948 0043	9,7379 2224	14,1386 1713	20,4911 8744	29,6451 9862	42,8130 3623	77
78	6,8621 7044	10,0300 5991	14,6334 6873	21,3108 3494	30,9792 3256	44,9536 8804	78
79	7,0337 2470	10,3309 6171	15,1456 4013	22,1632 6834	32,3732 9802	47,2013 7244	79
80	7,2095 6782	10,6408 9056	15,6757 3754	23,0497 9907	33,8300 9643	49,5614 4107	80
81	7,3898 0701	10,9601 1727	16,2243 8835	23,9717 9103	35,3524 5077	52,0395 1312	81
82	7,5745 5219	11,2889 2079	16,7922 4195	24,9306 6267	36,9433 1106	54,6414 8878	82
83	7,7639 1599	11,6275 8842	17,3799 7041	25,9278 8918	38,6057 6006	57,3735 6322	83
84	7,9580 1389	11,9764 1607	17,9882 6938	26,9650 0475	40,3430 1926	60,2422 4138	84
85	8,1569 6424	12,3357 0855	18,6178 5881	28,0436 0494	42,1584 5513	63,2543 5344	85
86	8,3608 8834	12,7057 7981	19,2694 8387	29,1653 4914	44,0555 8561	66,4170 7112	86
87	8,5699 1055	13,0869 5320	19,9439 1580	30,3319 6310	46,0380 8696	69,7379 2467	87
88	8,7841 5832	13,4795 6180	20,6419 5285	31,5452 4163	48,1098 0087	73,2248 2091	88
89	9,0037 6228	13,8839 4865	21,3644 2120	32,8070 5129	50,2747 4191	76,8860 6195	89
90	9,2288 5633	14,3004 6711	22,1121 7595	34,1193 3334	52,5371 0530	80,7303 6505	90
91	9,4595 7774	14,7294 8112	22,8861 0210	35,4841 0668	54,9012 7503	84,7668 8330	91
92	9,6960 6718	15,1713 6556	23,6871 1568	36,9034 7094	57,3718 3241	89,0052 2747	92
93	9,9384 6886	15,6265 0652	24,5161 6473	38,3796 0978	59,9535 6487	93,4554 8884	93
94	10,1869 3058	16,0953 0172	25,3742 3049	39,9147 9417	62,6514 7529	98,1282 6328	94
95	10,4416 0385	16,5781 6077	26,2623 2856	41,5113 8594	65,4707 9168	103,0346 7645	95
96	10,7026 4395	17,0755 0559	27,1815 1006	43,1718 4138	68,4169 7730	108,1864 1027	96
97	10,9702 1004	17,5877 7076	28,1328 6291	44,8987 1503	71,4957 4128	113,5957 3078	97
98	11,2444 6530	18,1154 0388	29,1175 1311	46,6946 6363	74,7130 4964	119,2755 1732	98
99	11,5255 7693	18,6588 6600	30,1366 2607	48,5624 5018	78,0751 3687	125,2392 9319	99
100	11,8137 1635	19,2186 3198	31,1914 0798	50,5049 4818	81,5885 1803	131,5012 5785	100

TABLA IV. Monto de 1 a interés compuesto

$$s = (1+i)^n$$

n	$5\frac{1}{2}\%$	6%	$6\frac{1}{2}\%$	7%	$7\frac{1}{2}\%$	8%	n
1	1,0550 0000	1,0600 0000	1,0650 0000	1,0700 0000	1,0750 0000	1,0800 0000	1
2	1,1130 2500	1,1236 0000	1,1342 2500	1,1449 0000	1,1556 2500	1,1664 0000	2
3	1,1742 4138	1,1910 1600	1,2079 4963	1,2250 4300	1,2422 9688	1,2597 1200	3
4	1,2388 2465	1,2624 7696	1,2864 6635	1,3107 9601	1,3354 6914	1,3604 8896	4
5	1,3069 6001	1,3382 2558	1,3700 8666	1,4025 5173	1,4356 2933	1,4693 2808	5
6	1,3788 4281	1,4185 1911	1,4591 4230	1,5007 3035	1,5433 0153	1,5868 7432	6
7	1,4546 7916	1,5036 3026	1,5539 8655	1,6057 8148	1,6590 4914	1,7138 2427	7
8	1,5346 8651	1,5938 4807	1,6549 9567	1,7181 8618	1,7834 7783	1,8509 3021	8
9	1,6190 9427	1,6894 7896	1,7625 7039	1,8384 5921	1,9172 3866	1,9990 0463	9
10	1,7081 4446	1,7908 4770	1,8771 3747	1,9671 5136	2,0610 3156	2,1589 2500	10
11	1,8020 9240	1,8982 9856	1,9991 5140	2,1048 5195	2,2156 0893	2,3316 3900	11
12	1,9012 0749	2,0121 9647	2,1290 9624	2,2521 9159	2,3817 7960	2,5181 7012	12
13	2,0057 7390	2,1329 2826	2,2674 8750	2,4098 4500	2,5604 1307	2,7196 2373	13
14	2,1160 9146	2,2609 0396	2,4148 7418	2,5785 3415	2,7524 4405	2,9371 9362	14
15	2,2324 7649	2,3965 5819	2,5718 4101	2,7590 3154	2,9588 7735	3,1721 6911	15
16	2,3552 6270	2,5403 5168	2,7390 1067	2,9521 6375	3,1807 9315	3,4259 4264	16
17	2,4848 0215	2,6927 7279	2,9170 4637	3,1588 1521	3,4193 5264	3,7000 1805	17
18	2,6214 6627	2,8543 3915	3,1066 5438	3,3799 3228	3,6758 0409	3,9960 1950	18
19	2,7656 4691	3,0255 9950	3,3085 8691	3,6165 2754	3,9514 8940	4,3157 0106	19
20	2,9177 5749	3,2071 3547	3,5236 4506	3,8696 8446	4,2478 5110	4,6609 5714	20
21	3,0782 3415	3,3995 6360	3,7526 8199	4,1405 6237	4,5664 3993	5,0338 3372	21
22	3,2475 3703	3,6035 3742	3,9966 0632	4,4304 0174	4,9089 2293	5,4365 4041	22
23	3,4261 5157	3,8197 4966	4,2563 8573	4,7405 2986	5,2770 9215	5,8714 6365	23
24	3,6145 8990	4,0489 3464	4,5330 5081	5,0723 6695	5,6728 7406	6,3411 8074	24
25	3,8133 9235	4,2918 7072	4,8276 9911	5,4274 3264	6,0983 3961	6,8484 7520	25
26	4,0231 2893	4,5493 8296	5,1414 9955	5,8073 5292	6,5557 1508	7,3963 5321	26
27	4,2444 0102	4,8223 4594	5,4756 9702	6,2138 6763	7,0473 9371	7,9880 6147	27
28	4,4778 4307	5,1116 8670	5,8316 1733	6,6488 3836	7,5759 4824	8,6271 0639	28
29	4,7241 2444	5,4183 8790	6,2106 7245	7,1142 5705	8,1441 4436	9,3172 7490	29
30	4,9839 5129	5,7434 9117	6,6143 6616	7,6122 5504	8,7549 5519	10,0626 5689	30
31	5,2580 6861	6,0881 0064	7,0442 9996	8,1451 1290	9,4115 7683	10,8676 6944	31
32	5,5472 6238	6,4533 8668	7,5021 7946	8,7152 7080	10,1174 4509	11,7370 8300	32
33	5,8523 6181	6,8405 8988	7,9898 2113	9,3253 3975	10,8762 5347	12,6760 4964	33
34	6,1742 4171	7,2510 2528	8,5091 5950	9,9781 1354	11,6919 7248	13,6901 3361	34
35	6,5138 2501	7,6860 8679	9,0622 5487	10,6765 8148	12,5688 7042	14,7853 4429	35
36	6,8720 8538	8,1472 5200	9,6513 0143	11,4239 4219	13,5115 3570	15,9681 7184	36
37	7,2500 5008	8,6360 8712	10,2786 3603	12,2236 1814	14,5249 0088	17,2456 2558	37
38	7,6488 0283	9,1542 5235	10,9467 4737	13,0792 7141	15,6142 6844	18,6252 7563	38
39	8,0694 8699	9,7035 0749	11,6582 8595	13,9948 2041	16,7853 3858	20,1152 9768	39
40	8,5133 0877	10,2857 1794	12,4160 7453	14,9744 5784	18,0442 3897	21,7245 2150	40
41	8,9815 4076	10,9028 6101	13,2231 1938	16,0226 6989	19,3975 5689	23,4624 8322	41
42	9,4755 2550	11,5570 3267	14,0826 2214	17,1442 5678	20,8523 7366	25,3394 8187	42
43	9,9966 7940	12,2504 5463	14,9979 9258	18,3443 5475	22,4163 0168	27,3666 4042	43
44	10,5464 9677	12,9854 8191	15,9728 6209	19,6284 5959	24,0975 2431	29,5559 7166	44
45	11,1265 5409	13,7646 1083	17,0110 9813	21,0024 5176	25,9048 3863	31,9204 4939	45
46	11,7385 1456	14,5904 8748	18,1168 1951	22,4726 2338	27,8477 0153	34,4740 8534	46
47	12,3841 3287	15,4659 1673	19,2944 1278	24,0457 0702	29,9362 7915	37,2320 1217	47
48	13,0652 6017	16,3938 7173	20,5485 4961	25,7289 0651	32,1815 0008	40,2105 7314	48
49	13,7838 4948	17,3775 0403	21,8842 0533	27,5299 2997	34,5951 1259	43,4274 1899	49
50	14,5419 6120	18,4201 5427	23,3066 7868	29,4570 2506	37,1897 4603	46,9016 1251	50

TABLA V. Valor presente de 1 a interés compuesto

$$a = v^n = (1+i)^{-n}$$

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
1	0,9975 0623	0.9966 7774	0.9958 5062	0.9950 2488	0,9942 0050	0,9933 7748	1
2	0.9950 1869	0,9933 6652	0.9917 1846	0,9900 7450	0,9884 3463	0,9867 9882	2
3	0,9925 3734	0,9900 6630	0.9876 0345	0,9851 4876	0,9827 0220	0,9802 6373	3
4	0,9900 6219	0,9867 7704	0,9835 0551	0,9802 4752	0,9770 0302	0,9737 7192	4
5	0,9875 9321	0,9834 9871	0,9794 2457	0,9753 7067	0,9713 3688	0,9673 2310	5
6	0,9851 3038	0,9802 3127	0,9753 6057	0,9705 1808	0,9657 0361	0,9609 1699	6
7	0,9826 7370	0,9769 7469	0,9713 1343	0,9656 8963	0,9601 0301	0,9545 5330	7
8	0,9802 2314	0,9737 2893	0,9672 8308	0,9608 8520	0,9545 3489	0,9482 3175	8
9	0,9777 7869	0,9704 9395	0,9632 6946	0,9561 0468	0,9489 9907	0,9419 5207	9
10	0,9753 4034	0,9672 6972	0,9592 7249	0,9513 4794	0,9434 9534	0,9357 1398	10
11	0,9729 0807	0,9640 5620	0,9552 9211	0,9466 1487	0,9380 2354	0,9295 1720	11
12	0,9704 8187	0,9608 5335	0,9513 2824	0,9419 0534	0,9325 8347	0,9233 6145	12
13	0,9680 6171	0,9576 6115	0,9473 8082	0,9372 1924	0,9271 7495	0,9172 4648	13
14	0,9656 4759	0,9544 7955	0,9434 4978	0,9325 5646	0,9217 9779	0,9111 7200	14
15	0,9632 3949	0,9513 0852	0,9395 3505	0,9279 1688	0,9164 5182	0,9051 3775	15
16	0,9608 3740	0,9481 4803	0,9356 3657	0,9233 0037	0,9111 3686	0,8991 4346	16
17	0,9584 4130	0,9449 9803	0,9317 5426	0,9187 0684	0,9058 5272	0,8931 8886	17
18	0,9560 5117	0,9418 5851	0,9278 8806	0,9141 3616	0,9005 9922	0,8872 7371	18
19	0,9536 6700	0,9387 2941	0,9240 3790	0,9095 8822	0,8953 7619	0,8813 9772	19
20	0,9512 8878	0,9356 1071	0,9202 0372	0,9050 6290	0,8901 8346	0,8755 6065	20
21	0,9489 1649	0,9325 0236	0,9163 8544	0,9005 6010	0,8850 2084	0,8697 6224	21
22	0,9465 5011	0,9294 0435	0,9125 8301	0,8960 7971	0,8798 8815	0,8640 0222	22
23	0,9441 8964	0,9263 1663	0,9087 9636	0,8916 2160	0,8747 8524	0,8582 8035	23
24	0,9418 3505	0,9232 3916	0,9050 2542	0,8871 8567	0,8697 1192	0,8525 9638	24
25	0,9394 8634	0,9201 7192	0,9012 7013	0,8827 7181	0,8646 6802	0,8469 5004	25
26	0,9371 4348	0,9171 1487	0,8975 3042	0,8783 7991	0,8596 5338	0,8413 4110	26
27	0,9348 0646	0,9140 6798	0,8938 0623	0,8740 0986	0,8546 6782	0,8357 6931	27
28	0,9324 7527	0,9110 3121	0,8900 9749	0,8696 6155	0,8497 1117	0,8302 3441	28
29	0,9301 4990	0,9080 0453	0,8864 0414	0,8653 3488	0,8447 8327	0,8247 3617	29
30	0,9278 3032	0,9049 8790	0,8827 2611	0,8610 2973	0,8398 8394	0,8192 7434	30
31	0,9255 1653	0,9019 8130	0,8790 6335	0,8567 4600	0,8350 1303	0,8138 4868	31
32	0,9232 0851	0,8989 8468	0,8754 1578	0,8524 8358	0,8301 7037	0,8084 5896	32
33	0,9209 0624	0,8959 9802	0,8717 8335	0,8482 4237	0,8253 5580	0,8031 0492	33
34	0,9186 0972	0,8930 2128	0,8681 6599	0,8440 2226	0,8205 6914	0,7977 8635	34
35	0,9163 1892	0,8900 5444	0,8645 6365	0,8398 2314	0,8158 1025	0,7925 0299	35
36	0,9140 3384	0,8870 9745	0,8609 7624	0,8356 4492	0,8110 7896	0,7872 5463	36
37	0,9117 5445	0,8841 5028	0,8574 0373	0,8314 8748	0,8063 7510	0,7820 4102	37
38	0,9094 8075	0,8812 1290	0,8538 4604	0,8273 5073	0,8016 9853	0,7768 6194	38
39	0,9072 1272	0,8782 8528	0,8503 0311	0,8232 3455	0,7970 4907	0,7717 1716	39
40	0,9049 5034	0,8753 6739	0,8467 7488	0,8191 3886	0,7924 2659	0,7666 0645	40
41	0,9026 9361	0,8724 5920	0,8432 6129	0,8150 6354	0,7878 3091	0,7615 2959	41
42	0,9004 4250	0,8695 6066	0,8397 6228	0,8110 0850	0,7832 6188	0,7564 8635	42
43	0,8981 9701	0,8666 7175	0,8362 7779	0,8069 7363	0,7787 1935	0,7514 7650	43
44	0,8959 5712	0,8637 9245	0,8328 0776	0,8029 5884	0,7742 0316	0,7464 9984	44
45	0,8937 2281	0,8609 2270	0,8293 5212	0,7989 6402	0,7697 1317	0,7415 5613	45
46	0,8914 9407	0,8580 6249	0,8259 1083	0,7949 8907	0,7652 4922	0,7366 4516	46
47	0,8892 7090	0,8552 1179	0,8224 8381	0,7910 3390	0,7608 1115	0,7317 6672	47
48	0,8870 5326	0,8523 7055	0,8190 7102	0,7870 9841	0,7563 9883	0,7269 2058	48
49	0,8848 4116	0,8495 3876	0,8156 7238	0,7831 8250	0,7520 1209	0,7221 0654	49
50	0,8826 3457	0,8467 1637	0,8122 8785	0,7792 8607	0,7476 5079	0,7173 2437	50

$$a = v^n = (1+i)^{-n}$$

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
51	0,8804 3349	0,8439 0336	0,8089 1736	0,7754 0902	0,7433 1479	0,7125 7388	51
52	0,8782 3790	0,8410 9969	0,8055 6086	0,7715 5127	0,7390 0393	0,7078 5485	52
53	0,8760 4778	0,8383 0534	0,8022 1828	0,7677 1270	0,7347 1808	0,7031 6707	53
54	0,8738 6312	0,8355 2027	0,7988 8957	0,7638 9324	0,7304 5708	0,6985 1033	54
55	0,8716 8391	0,8327 4446	0,7955 7468	0,7600 9277	0,7262 2079	0,6938 8444	55
56	0,8695 1013	0,8299 7787	0,7922 7354	0,7563 1122	0,7220 0907	0,6892 8918	56
57	0,8673 4178	0,8272 2047	0,7889 8610	0,7525 4847	0,7178 2178	0,6847 2435	57
58	0,8651 7883	0,8244 7222	0,7857 1230	0,7488 0445	0,7136 5877	0,6801 8975	58
59	0,8630 2128	0,8217 3311	0,7824 5208	0,7450 7906	0,7095 1990	0,6756 8518	59
60	0,8608 6911	0,8190 0310	0,7792 0539	0,7413 7220	0,7054 0504	0,6712 1044	60
61	0,8587 2230	0,8162 8216	0,7759 7217	0,7376 8378	0,7013 1404	0,6667 6534	61
62	0,8565 8085	0,8135 7026	0,7727 5237	0,7340 1371	0,6972 4677	0,6623 4968	62
63	0,8544 4474	0,8108 6737	0,7695 4593	0,7303 6190	0,6932 0308	0,6579 6326	63
64	0,8523 1395	0,8081 7346	0,7663 5279	0,7267 2826	0,6891 8285	0,6536 0588	64
65	0,8501 8848	0,8054 8850	0,7631 7291	0,7231 1269	0,6851 8593	0,6492 7737	65
66	0,8480 6831	0,8028 1246	0,7600 0621	0,7195 1512	0,6812 1219	0,6449 7752	66
67	0,8459 5343	0,8001 4531	0,7568 5266	0,7159 3544	0,6772 6150	0,6407 0614	67
68	0,8438 4382	0,7974 8702	0,7537 1219	0,7123 7357	0,6733 3372	0,6364 6306	68
69	0,8417 3947	0,7948 3756	0,7505 8476	0,7088 2943	0,6694 2872	0,6322 4807	69
70	0,8396 4037	0,7921 9690	0,7474 7030	0,7053 0291	0,6655 4637	0,6280 6100	70
71	0,8375 4650	0,7895 6502	0,7443 6876	0,7017 9394	0,6616 8653	0,6239 0165	71
72	0,8354 5786	0,7869 4188	0,7412 8009	0,6983 0243	0,6578 4908	0,6197 6985	72
73	0,8333 7442	0,7843 2745	0,7382 0424	0,6948 2829	0,6540 3388	0,6156 6542	73
74	0,8312 9618	0,7817 2171	0,7351 4115	0,6913 7143	0,6502 4081	0,6115 8816	74
75	0,8292 2312	0,7791 2463	0,7320 9078	0,6879 3177	0,6464 6973	0,6075 3791	75
76	0,8271 5523	0,7765 3618	0,7290 5306	0,6845 0923	0,6427 2053	0,6035 1448	76
77	0,8250 9250	0,7739 5632	0,7260 2794	0,6811 0371	0,6389 9307	0,5995 1769	77
78	0,8230 3491	0,7713 8504	0,7230 1537	0,6777 1513	0,6352 8723	0,5955 4738	78
79	0,8209 8246	0,7688 2230	0,7200 1531	0,6743 4342	0,6316 0288	0,5916 0336	79
80	0,8189 3512	0,7662 6807	0,7170 2770	0,6709 8847	0,6279 3990	0,5876 8545	80
81	0,8168 9289	0,7637 2233	0,7140 5248	0,6676 5022	0,6242 9816	0,5837 9350	81
82	0,8148 5575	0,7611 8505	0,7110 8960	0,6643 2858	0,6206 7754	0,5799 2732	82
83	0,8128 2369	0,7586 5619	0,7081 3902	0,6610 2346	0,6170 7792	0,5760 8674	83
84	0,8107 9670	0,7561 3574	0,7052 0069	0,6577 3479	0,6134 9917	0,5722 7159	84
85	0,8087 7476	0,7536 2366	0,7022 7454	0,6544 6248	0,6099 4118	0,5684 8171	85
86	0,8067 5787	0,7511 1993	0,6993 6054	0,6512 0644	0,6064 0382	0,5647 1693	86
87	0,8047 4600	0,7486 2451	0,6964 5863	0,6479 6661	0,6028 8698	0,5609 770[illegible]	87
88	0,8027 3915	0,7461 3739	0,6935 6876	0,6447 4290	0,5993 9054	0,5572 6201	88
89	0,8007 3731	0,7436 5853	0,6906 9088	0,6415 3522	0,5959 1437	0,5535 7153	89
90	0,7987 4046	0,7411 8790	0,6878 2495	0,6383 4350	0,5924 5836	0,5499 0549	90
91	0,7967 4859	0,7387 2548	0,6849 7090	0,6351 6766	0,5890 2240	0,5462 6374	91
92	0,7947 6168	0,7362 7125	0,6821 2870	0,6320 0763	0,5856 0636	0,5426 4610	92
93	0,7927 7973	0,7338 2516	0,6792 9829	0,6288 6331	0,5822 1014	0,5390 5241	93
94	0,7908 0273	0,7313 8720	0,6764 7962	0,6257 3464	0,5788 3361	0,5354 8253	94
95	0,7888 3065	0,7289 5735	0,6736 7265	0,6226 2153	0,5754 7666	0,5319 3629	95
96	0,7868 6349	0,7265 3556	0,6708 7733	0,6195 2391	0,5721 3918	0,5284 1353	96
97	0,7849 0124	0,7241 2182	0,6680 9361	0,6164 4170	0,5688 2106	0,5249 1410	97
98	0,7829 4388	0,7217 1610	0,6653 2143	0,6133 7483	0,5655 2218	0,5214 3785	98
99	0,7809 9140	0,7193 1837	0,6625 6076	0,6103 2321	0,5622 4243	0,5179 8462	99
100	0,7790 4379	0,7169 2861	0,6598 1155	0,6072 8678	0,5589 8171	0,5145 5426	100

$$a = v^n = (1+i)^{-n}$$

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
101	0,7771 0104	0,7145 4679	0,6570 7374	0,6042 6545	0,5557 3989	0,5111 4661	101
102	0,7751 6313	0,7121 7288	0,6543 4730	0,6012 5915	0,5525 1688	0,5077 6154	102
103	0,7732 3006	0,7098 0686	0,6516 3216	0,5982 6781	0,5493 1255	0,5043 9888	103
104	0,7713 0180	0,7074 4869	0,6489 2829	0,5952 9136	0,5461 2681	0,5010 5849	104
105	0,7693 7836	0,7050 9837	0,6462 3565	0,5923 2971	0,5429 5955	0,4977 4022	105
106	0,7674 5971	0,7027 5585	0,6435 5417	0,5893 8279	0,5398 1065	0,4944 4393	106
107	0,7655 4584	0,7004 2111	0,6408 8382	0,5864 5054	0,5366 8002	0,4911 6946	107
108	0,7636 3675	0,6980 9413	0,6382 2455	0,5835 3288	0,5335 6754	0,4879 1669	108
109	0,7617 3242	0,6957 7488	0,6355 7632	0,5806 2973	0,5304 7312	0,4846 8545	109
110	0,7598 3284	0,6934 6334	0,6329 3907	0,5777 4102	0,5273 9664	0,4814 7561	110
111	0,7579 3799	0,6911 5947	0,6303 1277	0,5748 6669	0,5243 3800	0,4782 8703	111
112	0,7560 4787	0,6888 6326	0,6276 9736	0,5720 0666	0,5212 9710	0,4751 1957	112
113	0,7541 6247	0,6865 7468	0,6250 9281	0,5691 6085	0,5182 7383	0,4719 7308	113
114	0,7522 8176	0,6842 9370	0,6224 9906	0,5663 2921	0,5152 6810	0,4688 4743	114
115	0,7504 0575	0,6820 2030	0,6199 1608	0,5635 1165	0,5122 7980	0,4657 4248	115
116	0,7485 3441	0,6797 5445	0,6173 4381	0,5607 0811	0,5093 0884	0,4626 5809	116
117	0,7466 6774	0,6774 9613	0,6147 8222	0,5579 1852	0,5063 5510	0,4595 9413	117
118	0,7448 0573	0,6752 4531	0,6122 3126	0,5551 4280	0,5034 1849	0,4565 5046	118
119	0,7429 4836	0,6730 0198	0,6096 9088	0,5523 8090	0,5004 9891	0,4535 2695	119
120	0,7410 9562	0,6707 6608	0,6071 6104	0,5496 3273	0,4975 9627	0,4505 2346	120
121	0,7392 4750	0,6685 3763	0,6046 4170	0,5468 9824	0,4947 1046	0,4475 3986	121
122	0,7374 0399	0,6663 1657	0,6021 3281	0,5441 7736	0,4918 4138	0,4445 7602	122
123	0,7355 6508	0,6641 0289	0,5996 3434	0,5414 7001	0,4889 8895	0,4416 3181	123
124	0,7337 3075	0,6618 9657	0,5971 4623	0,5387 7612	0,4861 5305	0,4387 0710	124
125	0,7319 0100	0,6596 9758	0,5946 6844	0,5360 9565	0,4833 3361	0,4358 0175	125
126	0,7300 7581	0,6575 0590	0,5922 0094	0,5334 2850	0,4805 3051	0,4329 1565	126
127	0,7282 5517	0,6553 2149	0,5897 4367	0,5307 7463	0,4777 4367	0,4300 4866	127
128	0,7264 3907	0,6531 4434	0,5872 9660	0,5281 3396	0,4749 7300	0,4272 0065	128
129	0,7246 2750	0,6509 7443	0,5848 5969	0,5255 0643	0,4722 1839	0,4243 7151	129
130	0,7228 2045	0,6488 1172	0,5824 3288	0,5228 9197	0,4694 7976	0,4215 6110	130
131	0,7210 1791	0,6466 5620	0,5800 1615	0,5202 9052	0,4667 5701	0,4187 6930	131
132	0,7192 1986	0,6445 0784	0,5776 0944	0,5177 0201	0,4640 5005	0,4159 9600	132
133	0,7174 2629	0,6423 6662	0,5752 1273	0,5151 2637	0,4613 5879	0,4132 4106	133
134	0,7156 3720	0,6402 3251	0,5728 2595	0,5125 6356	0,4586 8314	0,4105 0436	134
135	0,7138 5257	0,6381 0549	0,5704 4908	0,5100 1349	0,4560 2301	0,4077 8579	135
136	0,7120 7239	0,6359 8554	0,5680 8207	0,5074 7611	0,4533 7830	0,4050 8522	136
137	0,7102 9664	0,6338 7263	0,5657 2488	0,5049 5135	0,4507 4893	0,4024 0254	137
138	0,7085 2533	0,6317 6674	0,5633 7748	0,5024 3916	0,4481 3481	0,3997 3762	138
139	0,7067 5843	0,6296 6785	0,5610 3981	0,4999 3946	0,4455 3585	0,3970 9035	139
140	0,7049 9595	0,6275 7593	0,5587 1185	0,4974 5220	0,4429 5197	0,3944 6061	140
141	0,7032 3785	0,6254 9096	0,5563 9354	0,4949 7731	0,4403 8306	0,3918 4829	141
142	0,7014 8414	0,6234 1292	0,5540 8485	0,4925 1474	0,4378 2906	0,3892 5327	142
143	0,6997 3480	0,6213 4178	0,5517 8574	0,4900 6442	0,4352 8987	0,3866 7543	143
144	0,6979 8983	0,6192 7752	0,5494 9618	0,4876 2628	0,4327 6541	0,3841 1467	144
145	0,6962 4921	0,6172 2012	0,5472 1611	0,4852 0028	0,4302 5558	0,3815 7086	145
146	0,6945 1292	0,6151 6955	0,5449 4550	0,4827 8635	0,4277 6031	0,3790 4390	146
147	0,6927 8097	0,6131 2580	0,5426 8432	0,4803 8443	0,4252 7952	0,3765 3368	147
148	0,6910 5334	0,6110 8884	0,5404 3252	0,4779 9446	0,4228 1311	0,3740 4008	148
149	0,6893 3001	0,6090 5864	0,5381 9006	0,4756 1637	0,4203 6100	0,3715 6299	149
150	0,6876 1098	0,6070 3519	0,5359 5690	0,4732 5012	0,4179 2312	0,3691 0231	150

$$a = v^n = (1+i)^{-n}$$

n	$\frac{3}{4}$%	1%	$1\frac{1}{4}$%	$1\frac{1}{2}$%	$1\frac{3}{4}$%	2%	n
1	0,9925 5583	0,9900 9901	0,9876 5432	0,9852 2167	0,9828 0098	0,9803 9216	1
2	0,9851 6708	0,9802 9605	0,9754 6106	0,9706 6175	0,9658 9777	0,9611 6878	2
3	0,9778 3333	0,9705 9015	0,9634 1833	0,9563 1699	0,9492 8528	0,9423 2233	3
4	0,9705 5417	0,9609 8034	0,9515 2428	0,9421 8423	0,9329 5851	0,9238 4543	4
5	0,9633 2920	0,9514 6569	0,9397 7706	0,9282 6033	0,9169 1254	0,9057 3081	5
6	0,9561 5802	0,9420 4524	0,9281 7488	0,9145 4219	0,9011 4254	0,8879 7138	6
7	0,9490 4022	0,9327 1805	0,9167 1593	0,9010 2679	0,8856 4378	0,8705 6018	7
8	0,9419 7540	0,9234 8322	0,9053 9845	0,8877 1112	0,8704 1157	0,8534 9037	8
9	0,9349 6318	0,9143 3982	0,8942 2069	0,8745 9224	0,8554 4135	0,8367 5527	9
10	0,9280 0315	0,9052 8695	0,8831 8093	0,8616 6723	0,8407 2860	0,8203 4830	10
11	0,9210 9494	0,8963 2372	0,8722 7746	0,8489 3323	0,8262 6889	0,8042 6304	11
12	0,9142 3815	0,8874 4923	0,8615 0860	0,8363 8742	0,8120 5788	0,7884 9318	12
13	0,9074 3241	0,8786 6260	0,8508 7269	0,8240 2702	0,7980 9128	0,7730 3253	13
14	0,9006 7733	0,8699 6297	0,8403 6809	0,8118 4928	0,7843 6490	0,7578 7502	14
15	0,8939 7254	0,8613 4947	0,8299 9318	0,7998 5150	0,7708 7459	0,7430 1473	15
16	0,8873 1766	0,8528 2126	0,8197 4635	0,7880 3104	0,7576 1631	0,7284 4581	16
17	0,8807 1231	0,8443 7749	0,8096 2602	0,7763 8526	0,7445 8605	0,7141 6256	17
18	0,8741 5614	0,8360 1731	0,7996 3064	0,7649 1159	0,7317 7990	0,7001 5937	18
19	0,8676 4878	0,8277 3992	0,7897 5866	0,7536 0747	0,7191 9401	0,6864 3076	19
20	0,8611 8985	0,8195 4447	0,7800 0855	0,7424 7042	0,7068 2458	0,6729 7133	20
21	0,8547 7901	0,8114 3017	0,7703 7881	0,7314 9795	0.6946 6789	0,6597 7582	21
22	0,8484 1589	0,8033 9621	0,7608 6796	0,7206 8763	0,6827 2028	0,6468 3904	22
23	0,8421 0014	0,7954 4179	0,7514 7453	0,7100 3708	0,6709 7817	0,6341 5592	23
24	0,8358 3140	0,7875 6613	0,7421 9707	0,6995 4392	0.6594 3800	0,6217 2149	24
25	0,8296 0933	0,7797 6844	0,7330 3414	0,6892 0583	0,6480 9632	0,6095 3087	25
26	0,8234 3358	0,7720 4796	0,7239 8434	0,6790 2052	0,6369 4970	0,5975 7928	26
27	0,8173 0380	0,7644 0392	0,7150 4626	0,6689 8574	0,6259 9479	0,5858 6204	27
28	0,8112 1966	0,7568 3557	0,7062 1853	0,6590 9925	0,6152 2829	0,5743 7455	28
29	0,8051 8080	0,7493 4215	0,6974 9978	0,6493 5887	0,6046 4697	0,5631 1231	29
30	0,7991 8690	0,7419 2292	0,6888 8867	0,6397 6243	0,5942 4764	0,5520 7089	30
31	0,7932 3762	0,7345 7715	0,6803 8387	0,6303 0781	0,5840 2716	0,5412 4597	31
32	0;7873 3262	0,7273 0411	0,6719 8407	0,6209 9292	0,5739 8247	0,5306 3330	32
33	0,7814 7158	0,7201 0307	0,6636 8797	0,6118 1568	0,5641 1053	0,5202 2873	33
34	0,7756 5418	0,7129 7334	0,6554 9429	0,6027 7407	0,5544 0839	0,5100 2817	34
35	0,7698 8008	0,7059 1420	0,6474 0177	0,5938 6608	0,5448 7311	0,5000 2761	35
36	0,7641 4896	0,6989 2495	0,6394 0916	0,5850 8974	0,5355 0183	0,4902 2315	36
37	0,7584 6051	0,6920 0490	0,6315 1522	0,5764 4309	0,5262 9172	0,4806 1093	37
38	0,7528 1440	0,6851 5337	0,6237 1873	0,5679 2423	0,5172 4002	0,4711 8719	38
39	0,7472 1032	0,6783 6967	0,6160 1850	0,5595 3126	0,5083 4400	0,4619 4822	39
40	0,7416 4796	0,6716 5314	0,6084 1334	0,5512 6232	0.4996 0098	0,4528 9042	40
41	0,7361 2701	0,6650 0311	0,6009 0206	0,5431 1559	0,4910 0834	0,4440 1021	41
42	0,7306 4716	0,6584 1892	0,5934 8352	0,5350 8925	0.4825 6348	0.4353 0413	42
43	0,7252 0809	0,6518 9992	0,5861 5656	0,5271 8153	0,4742 6386	0,4267 6875	43
44	0,7198 0952	0,6454 4546	0,5789 2006	0,5193 9067	0,4661 0699	0.4184 0074	44
45	0,7144 5114	0,6390 5492	0,5717 7290	0,5117 1494	0,4580 9040	0.4101 9680	45
46	0,7091 3264	0,6327 2764	0,5647 1397	0,5041 5265	0.4502 1170	0.4021 5373	46
47	0,7038 5374	0,6264 6301	0,5577 4219	0.4967 0212	0,4424 6850	0,3942 6836	47
48	0,6986 1414	0,6202 6041	0,5508 5649	0,4893 6170	0.4348 5848	0,3865 3761	48
49	0,6934 1353	0,6141 1921	0,5440 5579	0.4821 2975	0,4273 7934	0,3789 5844	49
50	0,6882 5165	0,6080 3882	0,5373 3905	0,4750 0468	0.4200 2883	0,3715 2788	50

$$a = v^n = (1+i)^{-n}$$

n	$\frac{3}{4}$%	1%	$1\frac{1}{4}$%	$1\frac{1}{2}$%	$1\frac{3}{4}$%	2%	n
51	0,6831 2819	0.6020 1864	0.5307 0524	0,4679 8491	0,4128 0475	0,3642 4302	51
52	0.6780 4286	0,5960 5806	0.5241 5332	0,4610 6887	0,4057 0492	0,3571 0100	52
53	0,6729 9540	0,5901 5649	0.5176 8229	0,4542 5505	0,3987 2719	0,3500 9902	53
54	0,6679 8551	0,5843 1336	0.5112 9115	0,4475 4192	0,3918 6947	0,3432 3433	54
55	0,6630 1291	0,5785 2808	0,5049 7892	0.4409 2800	0,3851 2970	0,3365 0425	55
56	0,6580 7733	0.5728 0008	0.4987 4461	0,4344 1182	0,3785 0585	0,3299 0613	56
57	0,6531 7849	0,5671 2879	0.4925 8727	0,4279 9194	0,3719 9592	0,3234 3738	57
58	0,6483 1612	0,5615 1365	0.4865 0594	0,4216 6694	0,3655 9796	0,3170 9547	58
59	0.6434 8995	0,5559 5411	0.4804 9970	0,4154 3541	0,3593 1003	0,3108 7791	59
60	0,6386 9970	0.5504 4962	0.4745 6760	0,4092 9597	0,3531 3025	0,3047 8227	60
61	0.6339 4511	0,5449 9962	0.4687 0874	0,4032 4726	0,3470 5676	0,2988 0614	61
62	0.6292 2592	0,5396 0358	0,4629 2222	0,3972 8794	0,3410 8772	0,2929 4720	62
63	0.6245 4185	0,5342 6097	0,4572 0713	0,3914 1669	0,3352 2135	0,2872 0314	63
64	0,6198 9266	0,5289 7126	0,4515 6259	0,3856 3221	0,3294 5587	0,2815 7170	64
65	0,6152 7807	0,5237 3392	0,4459 8775	0,3799 3321	0,3237 8956	0,2760 5069	65
66	0,6106 9784	0.5185 4844	0,4404 8173	0,3743 1843	0,3182 2069	0,2706 3793	66
67	0,6061 5170	0.5134 1429	0,4350 4368	0,3687 8663	0,3127 4761	0,2653 3130	67
68	0,6016 3940	0,5083 3099	0.4296 7277	0,3633 3658	0,3073 6866	0,2601 2873	68
69	0,5971 6070	0,5032 9801	0,4243 6817	0,3579 6708	0,3020 8222	0,2550 2817	69
70	0,5927 1533	0,4983 1486	0,4191 2905	0.3526 7692	0,2968 8670	0,2500 2761	70
71	0,5883 0306	0.4933 8105	0,4139 5462	0.3474 6495	0,2917 8054	0,2451 2511	71
72	0,5839 2363	0.4884 9609	0,4088 4407	0,3423 3000	0,2867 6221	0,2403 1874	72
73	0,5795 7681	0.4836 5949	0,4037 9661	0,3372 7093	0,2818 3018	0,2356 0661	73
74	0,5752 6234	0,4788 7078	0.3988 1147	0,3322 8663	0,2769 8298	0,2309 8687	74
75	0,5709 7999	0.4741 2949	0.3938 8787	0,3273 7599	0,2722 1914	0,2264 5771	75
76	0,5667 2952	0,4694 3514	0,3890 2506	0,3225 3793	0,2675 3724	0,2220 1737	76
77	0,5625 1069	0,4647 8726	0,3842 2228	0,3177 7136	0,2629 3586	0,2176 6408	77
78	0,5583 2326	0.4601 8541	0,3794 7879	0,3130 7523	0,2584 1362	0,2133 9616	78
79	0,5541 6701	0,4556 2912	0,3747 9387	0,3084 4850	0,2539 6916	0,2092 1192	79
80	0,5500 4170	0,4511 1794	0,3701 6679	0,3038 9015	0,2496 0114	0,2051 0973	80
81	0,5459 4710	0,4466 5142	0.3655 9683	0,2993 9916	0,2453 0825	0,2010 8797	81
82	0.5418 8297	0,4422 2913	0.3610 8329	0,2949 7454	0,2410 8919	0,1971 4507	82
83	0,5378 4911	0.4378 5063	0,3566 2547	0,2906 1531	0,2369 4269	0,1932 7948	83
84	0,5338 4527	0.4335 1547	0,3522 2268	0,2863 2050	0,2328 6751	0,1894 8968	84
85	0,5298 7123	0.4292 2324	0,3478 7426	0,2820 8917	0,2288 6242	0,1857 7420	85
86	0.5259 2678	0,4249 7350	0.3435 7951	0.2779 2036	0,2249 2621	0,1821 3157	86
87	0.5220 1169	0.4207 6585	0.3393 3779	0,2738 1316	0,2210 5770	0,1785 6036	87
88	0.5181 2575	0.4165 9985	0.3351 4843	0,2697 6666	0.2172 5572	0,1750 5918	88
89	0.5142 6873	0.4124 7510	0.3310 1080	0.2657 7997	0.2135 1914	0,1716 2665	89
90	0,5104 4043	0.4083 9119	0.3269 2425	0.2618 5218	0,2098 4682	0,1682 6142	90
91	0.5066 4063	0.4043 4771	0.3228 8814	0.2579 8245	0,2062 3766	0,1649 6217	91
92	0.5028 6911	0.4003 4427	0.3189 0187	0.2541 6990	0.2026 9057	0,1617 2762	92
93	0.4991 2567	0.3963 8046	0.3149 6481	0.2504 1369	0.1992 0450	0,1585 5649	93
94	0.4954 1009	0.3924 5590	0.3110 7636	0,2467 1300	0.1957 7837	0,1554 4754	94
95	0.4917 2217	0.3885 7020	0.3072 3591	0.2430 6699	0,1924 1118	0,1523 9955	95
96	0.4880 6171	0.3847 2297	0.3034 4287	0.2394 7487	0.1891 0190	0,1494 1132	96
97	0.4844 2850	0.3809 1383	0.2996 9666	0.2359 3583	0,1858 4953	0,1464 8169	97
98	0.4808 2233	0.3771 4241	0.2959 9670	0.2324 4909	0,1826 5310	0,1436 0950	98
99	0,4772 4301	0.3734 0832	0.2923 4242	0.2290 1389	0,1795 1165	0,1407 9363	99
100	0,4736 9033	0.3697 1121	0.2887 3326	0.2256 2944	0.1764 2422	0,1380 3297	100

$$a = v^n = (1+i)^{-n}$$

n	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%	n
1	0.9756 0976	0.9708 7379	0.9661 8357	0.9615 3846	0,9569 3780	0,9523 8095	1
2	0.9518 1440	0.9425 9591	0,9335 1070	0,9245 5621	0,9157 2995	0,9070 2948	2
3	0.9285 9941	0.9151 4[illegible]	0,9019 4271	0,8889 9636	0,8762 9660	0,8638 3760	3
4	0.9059 5064	0.8[illegible]	0,8714 4223	0,8548 0419	0,8385 6134	0,8227 0247	4
5	0,8838 5429	0,8626 [illegible]78	0,8419 7317	0,8219 2711	0,8024 5105	0,7835 2617	5
6	0.8622 9687	0.8374 8426	0.8135 0064	0,7903 1453	0,7678 9574	0,7462 1540	6
7	0.8412 6524	0,8130 9151	0,7859 9096	0,7599 1781	0,7348 2846	0,7106 8133	7
8	0,8207 4657	0.7894 0923	0.7594 1156	0,7306 9021	0,7031 8513	0,6768 3936	8
9	0,8007 2836	0,7664 1673	0,7337 3097	0,7025 8674	0,6729 0443	0,6446 0892	9
10	0.7811 9840	0,7440 9391	0,7089 1881	0,6755 6417	0,6439 2768	0,6139 1325	10
11	0.7621 4478	0,7224 2128	0,6849 4571	0,6495 8093	0,6161 9874	0,5846 7929	11
12	0.7435 5589	0,7013 7988	0,6617 8330	0,6245 9705	0,5896 6386	0,5568 3742	12
13	0.7254 2038	0,6809 5134	0,6394 0415	0,6005 7409	0,5642 7164	0,5303 2135	13
14	0,7077 2720	0,6611 1781	0,6177 8179	0,5774 7508	0,5399 7286	0,5050 6795	14
15	0.6904 6556	0,6418 6195	0.5968 9062	0,5552 6450	0,5167 2044	0,4810 1710	15
16	0,6736 2493	0,6231 6694	0,5767 0591	0,5339 0818	0,4944 6932	0,4581 1152	16
17	0.6571 9506	0,6050 1645	0,5572 0378	0,5133 7325	0,4731 7639	0,4362 9669	17
18	0.6411 6591	0,5873 9461	0,5383 6114	0,4936 2812	0,4528 0037	0,4155 2065	18
19	0.6255 2772	0,5702 8603	0,5201 5569	0,4746 4242	0,4333 0179	0,3957 3396	19
20	0.6102 7094	0,5536 7575	0,5025 6588	0,4563 8695	0,4146 4286	0,3768 8948	20
21	0.5953 8629	0.5375 4928	0,4855 7090	0,4388 3360	0,3967 8743	0,3589 4236	21
22	0.5808 6467	0,5218 9250	0,4691 5063	0,4219 5539	0,3797 0089	0,3418 4987	22
23	0.5666 9724	0,5066 9175	0,4532 8563	0,4057 2633	0,3633 5013	0,3255 7131	23
24	0,5528 7535	0,4919 3374	0,4379 5713	0,3901 2147	0,3477 0347	0,3100 6791	24
25	0,5393 9059	0.4776 0557	0,4231 4699	0,3751 1680	0,3327 3060	0,2953 0277	25
26	0.5262 3472	0.4636 9473	0,4088 3767	0.3606 8923	0,3184 0248	0,2812 4073	26
27	0,5133 9973	0,4501 8906	0 3950 [illegible]24	0.3468 1657	0.3046 9137	0,2678 4832	27
28	0,5008 7778	0,4370 7675	0,3816 5434	0,3334 7747	0,2915 7069	0,2550 9364	28
29	0.4886 6125	0.4243 4636	0,3687 4815	0,3206 5141	0,2790 1502	0,2429 4632	29
30	0.4767 4269	0.4119 8676	0,3562 7841	0.3083 1867	0.2670 0002	0,2313 7745	30
31	0.4651 1481	0,3999 8715	0.3442 3035	0,2964 6026	0,2555 0241	0,2203 5947	31
32	0,4537 7055	0,3883 3703	0.3325 8971	0,2850 5794	0,2444 9991	0,2098 6617	32
33	0,4427 0298	0,3770 2625	0.3213 4271	0,2740 9417	0,2339 7121	0,1998 7254	33
34	0,4319 0534	0.3660 4490	0.3104 7605	0,2635 5209	0,2238 9589	0,1903 5480	34
35	0.4213 7107	0,3553 8340	0.2999 7686	0,2534 1547	0,2142 5444	0,1812 9029	35
36	0.4110 9372	0,3450 3243	0,2898 3272	0,2436 6872	0.2050 2817	0,1726 5741	36
37	0.4010 6705	0,3349 8294	0,2800 3161	0,2342 9685	0,1961 9921	0,1644 3563	37
38	0.3912 8492	0,3252 2615	0,2705 6194	0,2252 8543	0,1877 5044	0,1566 0536	38
39	0.3817 4139	0,3157 5355	0,2614 1250	0,2166 2061	0,1796 6549	0,1491 4797	39
40	0.3724 3062	0,3065 5684	0,2525 7247	0.2082 8904	0,1719 2870	0,1420 4568	40
41	0.3633 4695	0.2976 2800	0.2440 3137	0.2002 7793	0.1645 2507	0,1352 8160	41
42	0.3544 8483	0.2889 5922	0.2357 7910	0,1925 7493	0,1574 4026	0,1288 3962	42
43	0.3458 3886	0.2805 4294	0.2278 0590	0.1851 6820	0.1506 6054	0,1227 0440	43
44	0.3374 0376	0.2723 7178	0.2201 0231	0.1780 4635	0.1441 7276	0,1168 6133	44
45	0.3291 7440	0.2644 3862	0.2126 5924	0,1711 9841	0.1379 6437	0,1112 9651	45
46	0.3211 4576	0,2567 3653	0.2054 6787	0.1646 1386	0.1320 2332	0.1059 9668	46
47	0.3133 1294	0,2492 5876	0.1985 1968	0,1582 8256	0,1263 3810	0,1009 4921	47
48	0,3056 7116	0,2419 9880	0.1918 0645	0,1521 9476	0.1208 9771	0,0961 4211	48
49	0.2982 1576	0,2349 5029	0.1853 2024	0,1463 4112	0,1156 9158	0,0915 6391	49
50	0.2909 4221	0.2281 0708	0.1790 5337	0,1407 1262	0,1107 0965	0,0872 0373	50

$$a = v^n = (1+i)^{-n}$$

n	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%	n
51	0,2838 4606	0,2214 6318	0,1729 9843	0,1353 0059	0,1059 4225	0,0830 5117	51
52	0,2769 2298	0,2150 1280	0,1671 4824	0,1300 9672	0,1013 8014	0,0790 9635	52
53	0,2701 6876	0,2087 5029	0,1614 9589	0,1250 9300	0,0970 1449	0,0753 2986	53
54	0,2635 7928	0,2026 7019	0,1560 3467	0,1202 8173	0,0928 3683	0,0717 4272	54
55	0,2571 5052	0,1967 6717	0,1507 5814	0,1156 5551	0,0888 3907	0,0683 2640	55
56	0,2508 7855	0,1910 3609	0,1456 6004	0,1112 0722	0,0850 1347	0,0650 7276	56
57	0,2447 5956	0,1854 7193	0,1407 3433	0,1069 3002	0,0813 5260	0,0619 7406	57
58	0,2387 8982	0,1800 6984	0,1359 7520	0,1028 1733	0,0778 4938	0,0590 2291	58
59	0,2329 6568	0,1748 2508	0,1313 7701	0,0988 6282	0,0744 9701	0,0562 1230	59
60	0,2272 8359	0,1697 3309	0,1269 3431	0,0950 6040	0,0712 8901	0,0535 3552	60
61	0,2217 4009	0,1647 8941	0,1226 4184	0,0914 0423	0,0682 1915	0,0509 8621	61
62	0,2163 3179	0,1599 8972	0,1184 9453	0,0878 8868	0,0652 8148	0,0485 5830	62
63	0,2110 5541	0,1553 2982	0,1144 8747	0,0845 0835	0,0624 7032	0,0462 4600	63
64	0,2059 0771	0,1508 0565	0,1106 1591	0,0812 5803	0,0597 8021	0,0440 4381	64
65	0,2008 8557	0,1464 1325	0,1068 7528	0,0781 3272	0,0572 0594	0,0419 4648	65
66	0,1959 8593	0,1421 4879	0,1032 6114	0,0751 2762	0,0547 4253	0,0399 4903	66
67	0,1912 0578	0,1380 0853	0,0997 6922	0,0722 3809	0,0523 8519	0,0380 4670	67
68	0,1865 4223	0,1339 8887	0,0963 9538	0,0694 5970	0,0501 2937	0,0362 3495	68
69	0,1819 9241	0,1300 8628	0,0931 3563	0,0667 8818	0,0479 7069	0,0345 0948	69
70	0,1775 5358	0,1262 9736	0,0899 8612	0,0642 1940	0,0459 0497	0,0328 6617	70
71	0,1732 2300	0,1226 1880	0,0869 4311	0,0617 4942	0,0439 2820	0,0313 0111	71
72	0,1689 9805	0,1190 4737	0,0840 0300	0,0593 7445	0,0420 3655	0,0298 1058	72
73	0,1648 7615	0,1155 7998	0,0811 6232	0,0570 9081	0,0402 2637	0,0283 9103	73
74	0,1608 5478	0,1122 1357	0,0784 1770	0,0548 9501	0,0384 9413	0,0270 3908	74
75	0,1569 3149	0,1089 4521	0,0757 6590	0,0527 8367	0,0368 3649	0,0257 5150	75
76	0,1531 0389	0,1057 7205	0,0732 0376	0,0507 5353	0,0352 5023	0,0245 2524	76
77	0,1493 6965	0,1026 9131	0,0707 2827	0,0488 0147	0,0337 3228	0,0233 5737	77
78	0,1457 2649	0,0997 0030	0,0683 3650	0,0469 2449	0,0322 7969	0,0222 4512	78
79	0,1421 7218	0,0967 9641	0,0660 2560	0,0451 1970	0,0308 8965	0,0211 8582	79
80	0,1387 0457	0,0939 7710	0,0637 9285	0,0433 8433	0,0295 5948	0,0201 7698	80
81	0,1353 2153	0,0912 3990	0,0616 3561	0,0417 1570	0,0282 8658	0,0192 1617	81
82	0,1320 2101	0,0885 8243	0,0595 5131	0,0401 1125	0,0270 6850	0,0183 0111	82
83	0,1288 0098	0,0860 0236	0,0575 3750	0,0385 6851	0,0259 0287	0,0174 2963	83
84	0,1256 5949	0,0834 9743	0,0555 9178	0,0370 8510	0,0247 8744	0,0165 9965	84
85	0,1225 9463	0,0810 6547	0,0537 1187	0,0356 5875	0,0237 2003	0,0158 0919	85
86	0,1196 0452	0,0787 0434	0,0518 9553	0,0342 8726	0,0226 9860	0,0150 5637	86
87	0,1166 8733	0,0764 1198	0,0501 4060	0,0329 6852	0,0217 2115	0,0143 3940	87
88	0,1138 4130	0,0741 8639	0,0484 4503	0,0317 0050	0,0207 8579	0,0136 5657	88
89	0,1110 6468	0,0720 2562	0,0468 0679	0,0304 8125	0,0198 9070	0,0130 0626	89
90	0,1083 5579	0,0699 2779	0,0452 2395	0,0293 0890	0,0190 3417	0,0123 8691	90
91	0,1057 1296	0,0678 9105	0,0436 9464	0,0281 8163	0,0182 1451	0,0117 9706	91
92	0,1031 3460	0,0659 1364	0,0422 1704	0,0270 9772	0,0174 3016	0,0112 3530	92
93	0,1006 1912	0,0639 9383	0,0407 8941	0,0260 5550	0,0166 7958	0,0107 0028	93
94	0,0981 6500	0,0621 2993	0,0394 1006	0,0250 5337	0,0159 6132	0,0101 9074	94
95	0,0957 7073	0,0603 2032	0,0380 7735	0,0240 8978	0,0152 7399	0,0097 0547	95
96	0,0934 3486	0,0585 6342	0,0367 8971	0,0231 6325	0,0146 1626	0,0092 4331	96
97	0,0911 5596	0,0568 5769	0,0355 4562	0,0222 7235	0,0139 8685	0,0088 0315	97
98	0,0889 3264	0,0552 0164	0,0343 4359	0,0214 1572	0,0133 8454	0,0083 8395	98
99	0,0867 6355	0,0535 9383	0,0331 8221	0,0205 9204	0,0128 0817	0,0079 8471	99
100	0,0845 4737	0,0520 3284	0,0320 6011	0,0198 0004	0,0122 5663	0,0076 0449	100

TABLA V. Valor presente de 1 a interés compuesto

$$a = v^n = (1+i)^{-n}$$

n	$5\frac{1}{2}\%$	6%	$6\frac{1}{2}\%$	7%	$7\frac{1}{2}\%$	8%	n
1	0,9478 6730	0,9433 9623	0.9389 6714	0,9345 7944	0,9302 3256	0,9259 2593	1
2	0.8984 5242	0.8899 9644	0.8816 5928	0.8734 3873	0,8653 3261	0,8573 3882	2
3	0.8516 1366	0,8396 1928	0.8278 4909	0,8162 9788	0,8049 6057	0,7938 3224	3
4	0,8072 1674	0.7920 9366	0.7773 2309	0.7628 9521	0,7488 0053	0,7350 2985	4
5	0,7651 3435	0.7472 5817	0.7298 8084	0.7129 8618	0,6965 5863	0,6805 8320	5
6	0,7252 4583	0.7049 6054	0,6853 3412	0.6663 4222	0,6479 6152	0,6301 6963	6
7	0,6874 3681	0,6650 5711	0,6435 0621	0,6227 4974	0,6027 5490	0,5834 9040	7
8	0.6515 9887	0,6274 1237	0,6042 3119	0.5820 0910	0,5607 0223	0,5402 6888	8
9	0,6176 2926	0,5918 9846	0,5673 5323	0,5439 3374	0,5215 8347	0,5002 4897	9
10	0,5854 3058	0,5583 9478	0,5327 2604	0.5083 4929	0,4851 9393	0.4631 9349	10
11	0.5549 1050	0,5267 8753	0,5002 1224	0,4750 9280	0,4513 4319	0,4288 8286	11
12	0,5259 8152	0,4969 6936	0.4696 8285	0,4440 1196	0,4198 5413	0,3971 1376	12
13	0,4985 6068	0,4688 3902	0,4410 1676	0,4149 6445	0,3905 6198	0,3676 9792	13
14	0,4725 6937	0,4423 0096	0.4141 0025	0,3878 1724	0,3633 1347	0,3404 6104	14
15	0,4479 3305	0,4172 6506	0.3888 2652	0,3624 4602	0,3379 6602	0,3152 4170	15
16	0,4245 8109	0.3936 4628	0,3650 9533	0.3387 3460	0.3143 8699	0,2918 9047	16
17	0,4024 4653	0,3713 6442	0,3428 1251	0,3165 7439	0,2924 5302	0,2702 6895	17
18	0,3814 6590	0,3503 4379	0.3218 8969	0,2958 6392	0,2720 4932	0,2502 4903	18
19	0,3615 7906	0,3305 1301	0.3022 4384	0,2765 0833	0.2530 6913	0,2317 1206	19
20	0,3427 2896	0,3118 0473	0,2837 9703	0,2584 1900	0.2354 1315	0,2145 4821	20
21	0,3248 6158	0,2941 5540	0,2664 7608	0,2415 1309	0,2189 8897	0,1986 5575	21
22	0,3079 2567	0,2775 0510	0,2502 1228	0,2257 1317	0,2037 1067	0,1839 4051	22
23	0,2918 7267	0,2617 9726	0.2349 4111	0,2109 4688	0,1894 9830	0,1703 1528	23
24	0,2766 5656	0,2469 7855	0,2206 0198	0,1971 4662	0,1762 7749	0,1576 9934	24
25	0,2622 3370	0,2329 9863	0,2071 3801	0,1842 4918	0,1639 7906	0,1460 1790	25
26	0,2485 6275	0,2198 1003	0,1944 9579	0,1721 9549	0,1525 3866	0,1352 0176	26
27	0,2356 0450	0,2073 6795	0,1826 2515	0,1609 3037	0,1418 9643	0,1251 8682	27
28	0,2233 2181	0,1956 3014	0,1714 7902	0,1504 0221	0,1319 9668	0,1159 1372	28
29	0,2116 7944	0,1845 5674	0,1610 1316	0,1405 6282	0,1227 8761	0,1073 2752	29
30	0,2006 4402	0,1741 1013	0,1511 8607	0,1313 6712	0,1142 2103	0,0993 7733	30
31	0.1901 8390	0,1642 5484	0.1419 5875	0,1227 7301	0,1062 5212	0,0920 1605	31
32	0,1802 6910	0,1549 5740	0,1332 9460	0,1147 4113	0,0988 3918	0,0852 0005	32
33	0,1708 7119	0,1461 8622	0,1251 5925	0,1072 3470	0,0919 4343	0,0788 8893	33
34	0,1619 6321	0,1379 1153	0,1175 2042	0,1002 1934	0,0855 2877	0,0730 4531	34
35	0,1535 1963	0.1301 0522	0,1103 4781	0,0936 6294	0,0795 6164	0,0676 3454	35
36	0,1455 1624	0.1227 4077	0.1036 1297	0,0875 3546	0,0740 1083	0.0626 2458	36
37	0,1379 3008	0,1157 9318	0,0972 8917	0,0818 0884	0,0688 4729	0,0579 8572	37
38	0,1307 3941	0.1092 3885	0,0913 5134	0,0764 5686	0,0640 4399	0.0536 9048	38
39	0,1239 2362	0.1030 5552	0,0857 7590	0,0714 5501	0,0595 7580	0,0497 1341	39
40	0,1174 6314	0.0972 2219	0,0805 4075	0,0667 8038	0,0554 1935	0,0460 3093	40
41	0,1113 3947	0.0917 1905	0,0756 2512	0,0624 1157	0.0515 5288	0,0426 2123	41
42	0,1055 3504	0,0865 2740	0,0710 0950	0,0583 2857	0.0479 5617	0.0394 6411	42
43	0,1000 3322	0,0816 2962	0,0666 7559	0,9545 1268	0.0446 1039	0.0365 4084	43
44	0,0948 1822	0,0770 0908	0,0626 0619	0,0509 4643	0,0414 9804	0,0338 3411	44
45	0,0898 7509	0,0726 5007	0,0587 8515	0,0476 1349	0,0386 0283	0.0313 2788	45
46	0,0851 8965	0,0685 3781	0,0551 9733	0,0444 9859	0,0359 0961	0,0290 0730	46
47	0,0807 4849	0,0646 5831	0,0518 2848	0,0415 8747	0,0334 0428	0,0268 5861	47
48	0,0765 3885	0,0609 9840	0,0486 6524	0,0388 6679	0,0310 7375	0,0248 6908	48
49	0,0725 4867	0,0575 4566	0,0456 9506	0,0363 2410	0,0289 0582	0,0230 2693	49
50	0,0687 6652	0,0542 8836	0,0429 0616	0,0339 4776	0.0268 8913	0,0213 2123	50

TABLA VI

$$(1+i)^{1/p}$$

p	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	p
2	1,0012 4922	1,0016 6528	1,0020 8117	1,0024 9688	1,0029 1243	1,0033 2780	2
3	1,0008 3264	1,0011 0988	1,0013 8696	1,0016 6390	1,0019 4068	1,0022 1730	3
4	1,0006 2441	1,0008 3229	1,0010 4004	1,0012 4766	1,0014 5515	1,0016 6252	4
6	1,0004 1623	1,0005 5479	1,0006 9324	1.0008 3160	1.0009 6987	1,0011 0804	6
12	1,0002 0809	1,0002 7735	1,0003 4656	1.0004 1571	1.0004 8482	1,0005 5387	12

p	$\frac{3}{4}\%$	1%	$1\frac{1}{4}\%$	$1\frac{1}{2}\%$	$1\frac{3}{4}\%$	2%	p
2	1,0037 4299	1,0049 8756	1,0062 3059	1,0074 7208	1,0087 1205	1,0099 5049	2
3	1,0024 9378	1,0033 2228	1.0041 4943	1,0049 7521	1,0057 9963	1,0066 2271	3
4	1,0018 6975	1,0024 9068	1,0031 1046	1,0037 2909	1,0043 4658	1,0049 6293	4
6	1,0012 4611	1,0016 5976	1,0020 7256	1,0024 8452	1,0028 9562	1,0033 0589	6
12	1,0006 2286	1,0008 2954	1.0010 3575	1,0012 4149	1,0014 4677	1,0016 5158	12

p	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%	p
2	1,0124 2284	1,0148 8916	1,0173 4950	1,0198 0390	1,0222 5242	1,0246 9508	2
3	1,0082 6484	1,0099 0163	1,0115 3314	1,0131 5940	1,0147 8046	1,0163 9636	3
4	1,0061 9225	1,0074 1707	1,0086 3745	1,0098 5341	1,0110 6499	1,0122 7223	4
6	1,0041 2392	1,0049 3862	1,0057 5004	1,0065 5820	1,0073 6312	1,0081 6485	6
12	1,0020 5984	1,0024.6627	1,0028 7090	1,0032 7374	1,0036 7481	1,0040 7412	12

p	$5\frac{1}{2}\%$	6%	$6\frac{1}{2}\%$	7%	$7\frac{1}{2}\%$	8%	p
2	1,0271 3193	1,0295 6301	1,0319 8837	1.0344 0804	1,0368 2207	1,0392 3048	2
3	1,0180 0713	1,0196 1282	1,0212 1347	1,0228 0912	1,0243 9981	1,0259 8557	3
4	1,0134 7517	1,0146 7385	1,0158 6828	1,0170 5853	1,0182 4460	1,0194 2655	4
6	1,0089 6339	1,0097 5879	1,0105 5107	1,0113 4026	1,0121 2638	1,0129 0946	6
12	1,0044 7170	1,0048 6755	1,0052 6169	1,0056 5415	1,0060 4492	1,0064 3403	12

TABLA VII

$$(1+i)^{-1/p}$$

p	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	p
2	0,9987 5234	0,9983 3749	0,9979 2315	0,9975 0934	0,9970 9603	0,9966 8324	2
3	0,9991 6805	0,9988 9135	0,9986 1496	0,9983 3887	0,9980 6308	0,9977 8760	3
4	0,9993 7597	0,9991 6840	0,9989 6104	0,9987 5389	0,9985 4696	0,9983 4024	4
6	0,9995 8394	0,9994 4552	0,9993 0724	0,9991 6909	0,9990 3107	0,9988 9319	6
12	0,9997 9195	0,9997 2272	0,9996 5356	0,9995 8446	0,9995 1542	0,9994 4644	12

p	$\frac{3}{4}\%$	1%	$1\frac{1}{4}\%$	$1\frac{1}{2}\%$	$1\frac{3}{4}\%$	2%	p
2	0,9962 7096	0,9950 3719	0,9938 0799	0,9925 8333	0,9913 6319	0,9901 4754	2
3	0,9975 1243	0,9966 8872	0,9958 6772	0,9950 4942	0,9942 3381	0,9934 2086	3
4	0,9981 3374	0.9975 1551	0,9968 9919	0,9962 8477	0,9956 7223	0,9950 6158	4
6	0,9987 5544	0,9983 4299	0,9979 3172	0,9975 2164	0,9971 1274	0,9967 0500	6
12	0,9993 7753	0,9991 7115	0,9989 6533	0,9987 6005	0,9985 5532	0,9983 5114	12

p	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%	p
2	0,9877 2960	0,9853 2928	0,9829 4637	0,9805 8068	0,9782 3198	0,9759 0007	2
3	0,9918 0291	0,9901 9545	0,9885 9835	0,9870 1152	0,9854 3482	0,9838 6815	3
4	0,9938 4586	0,9926 3754	0,9914 3652	0,9902 4274	0,9890 5610	0,9878 7655	4
6	0,9958 9302	0,9950 8565	0,9942 8283	0,9934 8453	0,9926 9070	0,9919 0128	6
12	0,9979 4440	0,9975 3980	0,9971 3732	0,9967 3694	0,9963 3865	0,9959 4241	12

p	$5\frac{1}{2}\%$	6%	$6\frac{1}{2}\%$	7%	$7\frac{1}{2}\%$	8%	p
2	0,9735 8477	0,9712 8586	0,9690 0317	0,9667 3649	0,9644 8564	0,9622 5045	2
3	0,9823 1139	0,9807 6444	0,9792 2719	0,9776 9953	0,9761 8136	0,9746 7258	3
4	0,9867 0399	0,9855 3836	0,9843 7958	0,9822 2759	0,9820 8230	0,9809 4365	4
6	0,9911 1623	0,9903 3552	0,9895 5909	0,9887 8690	0,9880 1891	0,9872 5507	6
12	0,9955 4821	0,9951 5603	0,9917 6585	0,9943 7764	0,9939 9140	0,9936 0710	12

TABLA VIII

$$s_{\overline{\frac{1}{p}}|i} = \frac{(1+i)^{1/p} - 1}{i}$$

p	$\frac{1}{4}$%	$\frac{1}{3}$%	$\frac{5}{12}$%	$\frac{1}{2}$%	$\frac{7}{12}$%	$\frac{2}{3}$%	p
2	0,4996 8789	0,4995 8403	0,4994 8025	0,4993 7656	0,4992 7295	0,4991 6943	2
3	0,3330 5594	0,3329 6365	0,3328 7144	0,3327 7932	0,3326 8728	0,3325 9532	3
4	0.2497 6597	0,2496 8811	0,2496 1032	0.2495 3261	0,2494 5498	0,2493 7742	4
6	0.1664 9332	0.1664 3566	0,1663 7805	0.1663 2050	0,1662 6301	0.1662 0558	6
12	0.0832 3800	0.0832 0629	0,0831 7461	0,0831 4297	0,0831 1136	0,0830 7978	12

p	$\frac{3}{4}$%	1%	$1\frac{1}{4}$%	$1\frac{1}{2}$%	$1\frac{3}{4}$%	2%	p
2	0,4990 6600	0,4987 5621	0,4984 4719	0,4981 3893	0,4978 3143	0,4975 2469	2
3	0,3325 0345	0,3322 2835	0,3319 5401	0,3316 8042	0,3314 0758	0,3311 3548	3
4	0,2492 9994	0,2490 6793	0,2488 3660	0,2486 0593	0,2483 7592	0,2481 4658	4
6	0,1661 4821	0.1659 7644	0,1658 0518	0,1656 3445	0,1654 6423	0,1652 9452	6
12	0,0830 4824	0.0829 5381	0,0828 5968	0,0827 6585	0,0826 7231	0,0825 7907	12

p	$2\frac{1}{2}$%	3%	$3\frac{1}{2}$%	4%	$4\frac{1}{2}$%	5%	p
2	0,4969 1346	0,4963 0522	0.4956 9993	0,4950 9757	0,4944 9811	0,4939 0153	2
3	0,3305 9350	0,3300 5447	0,3295 1834	0,3289 8510	0,3284 5470	0,3279 2714	3
4	0,2476 8985	0,2472 3573	0,2467 8417	0,2463 3516	0,2458 8868	0,2454 4469	4
6	0,1649 5662	0.1646 2073	0,1642 8684	0,1639 5492	0,1636 2496	0,1632 9692	6
12	0.0823 9345	0.0822 0899	0,0820 2568	0,0818 4349	0,0816 6243	0,0814 8248	12

p	$5\frac{1}{2}$%	6%	$6\frac{1}{2}$%	7%	$7\frac{1}{2}$%	8%	p
2	0,4933 0780	0,4927 1690	0,4921 2880	0,4915 4348	0,4909 6090	0,4903 8106	2
3	0,3274 0237	0,3268 8037	0,3263 6112	0,3258 4460	0,3253 3076	0,3248 1960	3
4	0,2450 0317	0,2445 6410	0,2441 2746	0,2436 9321	0,2432 6135	0,2428 3184	4
6	0,1629 7080	0,1626 4657	0,1623 2422	0,1620 0372	0,1616 8505	0,1613 6821	6
12	0,0813 0362	0.0811 2584	0,0809 4914	0,0807 7351	0,0805 9892	0.0804 2538	12

TABLA IX

$$a_{\overline{\frac{1}{p}}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-1/p}}{i}$$

p	$\frac{1}{4}$%	$\frac{1}{3}$%	$\frac{5}{12}$%	$\frac{1}{2}$%	$\frac{7}{12}$%	$\frac{2}{3}$%	p
2	0,4990 6445	0,4987 5346	0,4984 4291	0,4981 3278	0,4978 2308	0,4975 1381	2
3	0,3327 7886	0,3325 9451	0.3324 1040	0,3322 2653	0,3320 4289	0,3318 5949	3
4	0,2496 1011	0,2494 8047	0,2493 5099	0,2492 2167	0,2490 9251	0,2489 6351	4
6	0,1664 2405	0,1663 4337	0.1662 6279	0,1661 8230	0,1661 0192	0,1660 2162	6
12	0.0832 2068	0,0831 8322	0,0831 4580	0.0831 0842	0.0830 7108	0,0830 3379	12

p	$\frac{3}{4}$%	1%	$1\frac{1}{4}$%	$1\frac{1}{2}$%	$1\frac{3}{4}$%	2%	p
2	0,4972 0496	0.4962 8098	0,4953 6080	0,4944 4440	0,4935 3176	0,4926 2285	2
3	0,3316 7633	0,3311 2825	0.3305 8228	0,3300 3841	0,3294 9662	0,3289 5689	3
4	0,2488 3468	0.2484 4912	0,2480 6500	0,2476 8230	0,2473 0101	0,2469 2113	4
6	0,1659 4143	0,1657 0141	0,1654 6225	0,1652 2395	0,1649 8649	0,1647 4987	6
12	0,0829 9654	0.0828 8506	0.0827 7395	0,0826 6322	0,0825 5287	0.0824 4290	12

p	$2\frac{1}{2}$%	3%	$3\frac{1}{2}$%	4%	$4\frac{1}{2}$%	5%	p
2	0,4908 1613	0.4890 2406	0,4872 4645	0,4854 8311	0,4837 3386	0.4819 9854	2
3	0.3278 8360	0.3268 1843	0.3257 6129	0,3247 1208	0,3236 7070	0,3226 3706	3
4	0,2461 6554	0.2454 1546	0,2446 7084	0,2439 3161	0,2431 9770	0,2424 6905	4
6	·0,1642 7915	0.1638 1173	0.1633 4759	0,1628 8668	0,1624 2897	0,1619 7442	6
12	0,0822 2408	0.0820 0674	0,0817 9086	0,0815 7643	0,0813 6344	0,0811 5185	12

p	$5\frac{1}{2}$%	6%	$6\frac{1}{2}$%	7%	$7\frac{1}{2}$%	8%	p
2	0,4802 7696	0.4785 6896	0,4768 7437	0.4751 9301	0.4735 2474	0,4718 6939	2
3	0.3216 1108	0.3205 9265	0,3195 8169	0,3185 7811	0,3175 8183	0,3165 9276	3
4	0.2417 4561	0,2410 2731	0.2403 1409	0.2396 0589	0,2389 0266	0,2382 0435	4
6	0,1615 2300	0.1610 7468	0,1606 2940	0.1601 8715	0,1597 4789	0,1593 1159	6
12	0,0809 4167	0.0807 3287	0.0805 2544	0,0803 1937	0,0801 1463	0,0799 1123	12

TABLA X

$$\frac{1}{s_{\overline{\frac{1}{p}}|i}} = \frac{i}{(1+i)^{1/p} - 1} \qquad \left(\frac{1}{a_{\overline{\frac{1}{p}}|i}} = \frac{1}{s_{\overline{\frac{1}{p}}|i}} + i\right)$$

p	$\frac{1}{4}$%	$\frac{1}{3}$%	$\frac{5}{12}$%	$\frac{1}{2}$%	$\frac{7}{12}$%	$\frac{2}{3}$%	p
2	2,0012 4922	2,0016 6528	2,0020 8117	2,0024 9688	2,0029 1243	2,0033 2780	2
3	3,0024 9861	3,0033 3087	3,0041 6282	3,0049 9446	3,0058 2579	3,0066 5682	3
4	4,0037 4805	4,0049 9653	4,0062 4459	4,0074 9221	4,0087 3940	4,0099 8616	4
6	6,0062 4697	6,0083 2794	6,0104 0824	6,0124 8788	6,0145 6684	6,0166 4513	6
12	12,0137 4380	12,0183 2232	12,0228 9946	12,0274 7524	12,0320 4964	12,0366 2268	12

p	$\frac{3}{4}$%	1%	$1\frac{1}{4}$%	$1\frac{1}{2}$%	$1\frac{3}{4}$%	2%	p
2	2,0037 4300	2,0049 8756	2,0062 3059	2,0074 7208	2,0087 1205	2.0099 5049	2
3	3,0074 8755	3,0099 7789	3,0124 6549	3.0149 5037	3.0174 3253	3,0199 1199	3
4	4,0112 3249	4,0149 6891	4,0187 0147	4,0224 3021	4.0261 5513	4,0298 7623	4
6	6,0187 2276	6,0249 5163	6,0311 7452	6,0373 9144	6,0436 0242	6.0498 0748	6
12	12,0411 9435	12,0549 0119	12,0685 9580	12,0822 7822	12,0959 4851	12.1096 0670	12

p	$2\frac{1}{2}$%	3%	$3\frac{1}{2}$%	4%	$4\frac{1}{2}$%	5%	p
2	2,0124 2284	2,0148 8916	2.0173 4950	2.0198 0390	2,0222 5241	2,0246 9508	2
3	3,0248 6282	3,0298 0294	3.0347 3244	3,0396 5138	3,0445 5985	3,0494 5791	3
4	4,0373 0709	4,0447 2289	4,0521 2374	4,0595 0975	4,0668 8103	4,0742 3769	4
6	6,0621 9992	6,0745 6894	6,0869 1471	6,0992 3740	6,1115 3716	6,1238 1418	6
12	12,1368 8698	12,1641 1941	12,1913 0434	12,2184 4211	12,2455 3306	12,2725 7753	12

p	$5\frac{1}{2}$%	6%	$6\frac{1}{2}$%	7%	$7\frac{1}{2}$%	8%	p
2	2,0271 3193	2,0295 6301	2,0319 8837	2,0344 0804	2.0368 2207	2,0392 3048	2
3	3,0543 4565	3,0592 2313	3,0640 9043	3,0689 4762	3,0737 9477	3,0786 3195	3
4	4,0815 7981	4,0889 0752	4,0962 2091	4,1035 2009	4,1108 0514	4,1180 7618	4
6	6,1360 6860	6,1483 0059	6,1605 1031	6,1726 9791	6,1848 6355	6,1970 0737	6
12	12,2995 7585	12,3265 2834	12,3534 3533	12,3802 9715	12.4071 1409	12,4338 8648	12

TABLA XI

$$\frac{i}{j_{(p)}} = \frac{i}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}$$

p	$\frac{1}{4}$%	$\frac{1}{3}$%	$\frac{5}{12}$%	$\frac{1}{2}$%	$\frac{7}{12}$%	$\frac{2}{3}$%	p
2	1,0006 2461	1.0008 3264	1,0010 4058	1,0012 4844	1,0014 5621	1,0016 6390	2
3	1,0008 3287	1,0011 1029	1,0013 8761	1.0016 6482	1,0019 4193	1.0022 1894	3
4	1,0009 3701	1,0012 4913	1,0015 6115	1.0018 7305	1,0021 8485	1,0024 9654	4
6	1,0010 4116	1.0013 8799	1,0017 3471	1.0020 8131	1,0024 2781	1,0027 7419	6
12	1,0011 4532	1,0015 2686	1,0019 0829	1,0022 8960	1,0026 7080	1,0030 5189	12

p	$\frac{3}{4}$%	1%	$1\frac{1}{4}$%	$1\frac{1}{2}$%	$1\frac{3}{4}$%	2%	p
2	1,0018 7150	1,0024 9378	1,0031 1529	1,0037 3604	1,0043 5603	1,0049 7525	2
3	1,0024 9585	1,0033 2596	1,0041 5516	1,0049 8346	1,0058 1084	1,0066 3733	3
4	1,0028 0812	1,0037 4223	1,0046 7537	1,0056 0755	1,0065 3878	1,0074 6906	4
6	1,0031 2046	1,0041 5861	1,0051 9575	1,0062 3191	1.0072 6707	1,0083 0125	6
12	1,0034 3286	1,0045 7510	1,0057 1632	1.0068 5652	1,0079 9571	1.0091 3389	12

p	$2\frac{1}{2}$%	3%	$3\frac{1}{2}$%	4%	$4\frac{1}{2}$%	5%	p
2	1,0062 1142	1.0074 4458	1,0086 7475	1,0099 0195	1,0111 2621	1,0123 4754	2
3	1,0082 8761	1,0099 3431	1,0115 7748	1,0132 1713	1,0148 5328	1,0164 8597	3
4	1,0093 2677	1,0111 8072	1.0130 3094	1,0148 7744	1,0167 2026	1,0185 5942	4
6	1,0103 6665	1,0124 2816	1,0144 8578	1,0165 3957	1,0185 8953	1.0206 3570	6
12	1,0114 0725	1,0136 7662	1,0159 4203	1,0182 0351	1,0204 6109	1,0227 1479	12

p	$5\frac{1}{2}$%	6%	$6\frac{1}{2}$%	7%	$7\frac{1}{2}$%	8%	p
2	1.0135 6596	1,0147 8151	1.0159 9419	1,0172 0402	1,0184 1103	1,0196 1524	2
3	1,0181 1522	1,0197 4104	1.0213 6348	1,0229 8254	1,0245 9826	1,0262 1065	3
4	1,0203 9495	1.0222 2688	1,0240 5523	1,0258 8002	1.0277 0129	1,0295 1904	4
6	1,0226 7810	1.0247 1676	1,0267 5172	1,0287 8298	1,0308 1059	1,0328 3456	6
12	1,0249 6465	1,0272 1070	1,0294 5294	1.0316 9143	1,0339 2617	1,0361 5721	12

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
1	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1
2	2,0025 0000	2,0033 3333	2,0041 6667	2,0050 0000	2,0058 3333	2.0066 6667	2
3	3,0075 0625	3,0100 1111	3,0125 1736	3,0150 2500	3,0175 3403	3,0200 4444	3
4	4,0150 2502	4,0200 4448	4,0250 6952	4,0301 0013	4,0351 3631	4,0401 7807	4
5	5,0250 6258	5,0334 4463	5,0418 4064	5,0502 5063	5,0586 7460	5,0671 1259	5
6	6,0376 2523	6,0502 2278	6,0628 4831	6,0755 0188	6.0881 8354	6,1008 9335	6
7	7,0527 1930	7,0703 9019	7,0881 1018	7,1058 7939	7,1236 9794	7,1415 6597	7
8	8,0703 5110	8.0939 5816	8,1176 4397	8,1414 0879	8,1652 5285	8,1891 7641	8
9	9,0905 2697	9,1209 3802	9,1514 6749	9,1821 1583	9.2128 8349	9,2437 7092	9
10	10,1132 5329	10,1513 4114	10,1895 9860	10,2280 2641	10,2666 2531	10,3053 9606	10
11	11,1385 3642	11,1851 7895	11,2320 5526	11,2791 6654	11,3265 1396	11.3740 9870	11
12	12,1663 8277	12,2224 6288	12.2788 5549	12,3355 6237	12,3925 8529	12.4499 2602	12
13	13,1967 9872	13,2632 0442	13,3300 1739	13,3972 4018	13.4648 7537	13,5329 2553	13
14	14,2297 9072	14,3074 1510	14,3855 5913	14,4642 2639	14,5434 2048	14,6231 4503	14
15	15,2653 6520	15,3551 0648	15,4454 9896	15,5365 4752	15,6282 5710	15.7206 3267	15
16	16,3035 2861	16,4062 9017	16,5098 5520	16,6142 3026	16,7194 2193	16.8254 3688	16
17	17,3442 8743	17,4609 7781	17,5786 4627	17.6973 0141	17,8169 5189	17.9376 0646	17
18	18,3876 4815	18,5191 8107	18,6518 9063	18,7857 8791	18,9208 8411	19,0571 9051	18
19	19,4336 1727	19,5809 1167	19,7296 0684	19.8797 1685	20,0312 5593	20,1842 3844	19
20	20,4822 0131	20,6461 8137	20,8118 1353	20,9791 1544	21,1481 0493	21,3188 0003	20
21	21,5334 0682	21,7150 0198	21,8985 2942	22,0840 1101	22,2714 6887	22,4609 2536	21
22	22,5872 4033	22,7873 8532	22,9897 7330	23.1944 3107	23,4013 8577	23.6106 6487	22
23	23,6437 0843	23,8633 4327	24,0855 6402	24,3104 0322	24,5378 9386	24,7680 6930	23
24	24,7028 1770	24,9428 8775	25,1859 2053	25,4319 5524	25,6810 3157	25,9331 8976	24
25	25,7645 7475	26,0260 3071	26,2908 6187	26,5591 1502	26,8308 3759	27,1060 7769	25
26	26,8289 8619	27,1127 8414	27,4004 0713	27,6919 1059	27,9873 5081	28.2867 8488	26
27	27,8960 5865	28,2031 6009	28,5145 7549	28,8303 7015	29.1506 1035	29.4753 6344	27
28	28,9657 9880	29,2971 7062	29,6333 8622	29,9745 2200	30,3206 5558	30.6718 6587	28
29	30,0382 1330	30,3948 2786	30,7568 5866	31,1243 9461	31,4975 2607	31,8763 4497	29
30	31,1133 0883	31,4961 4395	31,8850 1224	32,2800 1658	32,6812 6164	33.0888 5394	30
31	32,1910 9210	32,6011 3110	33,0178 6646	33,4414 1666	33,8719 0233	34,3094 4630	31
32	33,2715 6983	33,7098 0154	34,1554 4090	34,6086 2375	35,0694 8843	35,5381 7594	32
33	34,3547 4876	34,8221 6754	35,2977 5524	35,7816 6686	36,2740 6045	36,7750 9711	33
34	35,4406 3563	35,9382 4143	36,4448 2922	36,9605 7520	37,4856 5913	38,0202 6443	34
35	36,5292 3722	37,0580 3557	37,5966 8268	38,1453 7807	38,7043 2548	39,2737 3286	35
36	37,6205 6031	38,1815 6236	38,7533 3552	39.3361 0496	39.9301 0071	40.5355 5774	36
37	38,7146 1171	39,3088 3423	39,9148 0775	40.5327 8549	41,1630 2630	41.8057 9479	37
38	39,8113 9824	40,4398 6368	41,0811 1945	41.7354 4942	42,4031 4395	43,0845 0009	38
39	40,9109 2673	41,5746 6322	42,2522 9078	42,9441 2666	43.6504 9562	44,3717 3009	39
40	42,0132 0405	42,7132 4543	43,4283 4199	44,1588 4730	44,9051 2352	45,6675 4163	40
41	43,1182 3706	43,8556 2292	44,6092 9342	45,3796 4153	46.1670 7007	46,9719 9191	41
42	44,2260 3265	45,0018 0833	45,7951 6547	46,6065 3974	47,4363 7798	48,2851 3852	42
43	45,3365 9774	46,1518 1436	46,9859 7866	47,8395 7244	48.7130 9018	49,6070 3944	43
44	46,4499 3923	47,3056 5374	48,1817 5357	49,0787 7030	49,9972 4988	50,9377 5304	44
45	47,5660 6408	48,4633 3925	49,3825 1088	50,3241 6415	51,2889 0050	52,2773 3806	45
46	48,6849 7924	49,6248 8371	50,5882 7134	51.5757 8497	52.5880 8575	53,6258 5365	46
47	49,8066 9169	50,7902 9999	51,7990 5581	52,8336 6390	53.8948 4959	54,9833 5934	47
48	50,9312 0842	51,9596 0099	53,0148 8521	54,0978 3222	55,2092 3621	56,3499 1507	48
49	52,0585 3644	53,1327 9966	54,2357 8056	55.3683 2138	56.5312 9009	57,7255 8117	49
50	53,1886 8278	54,3099 0899	55,4617 6298	56,6451 6299	57,8610 5595	59,1104 1837	50

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
51	54,3216 5449	55,4909 4202	56,6928 5366	57.9283 8880	59.1985 7877	60.5044 8783	51
52	55,4574 5862	56,6759 1183	57,9290 7388	59.2180 3075	60,5439 0381	61.9078 5108	52
53	56,5961 0227	57,8648 3154	59,1704 4502	60.5141 2090	61,8970 7659	63,3205 7009	53
54	57,7375 9252	59,0577 1431	60,4169 8854	61,8166 9150	63,2581 4287	64,7427 0722	54
55	58,8819 3650	60,2545 7336	61,6687 2600	63,1257 7496	64,6271 4870	66,1743 2527	55
56	60,0291 4135	61,4554 2194	62,9256 7902	64,4414 0384	66,0041 4040	67,6154 8744	56
57	61,1792 1420	62,6602 7334	64,1878 6935	65,7636 1086	67,3891 6455	69,0662 5736	57
58	62,3321 6223	63,8691 4092	65,4553 1881	67,0924 2891	68,7822 6801	70,5266 9907	58
59	63,4879 9264	65,0820 3806	66,7280 4930	68,4278 9105	70,1834 9791	71,9968 7706	59
60	64,6467 1262	66,2989 7818	68,0060 8284	69,7700 3051	71,5929 0165	73,4768 5625	60
61	65,8083 2940	67,5199 7478	69,2894 4152	71,1188 8066	73,0105 2691	74,9667 0195	61
62	66,9728 5023	68,7450 4136	70,5781 4753	72,4744 7507	74,4364 2165	76,4664 7997	62
63	68,1402 8235	69,9741 9150	71,8722 2314	73,8368 4744	75,8706 3411	77,9762 5650	63
64	69,3106 3306	71,2074 3880	73,1716 9074	75,2060 3168	77,3132 1281	79,4960 9821	64
65	70,4839 0964	72,4447 9693	74,4765 7278	76,5820 6184	78,7642 0655	81,0260 7220	65
66	71,6601 1942	73,6862 7959	75,7868 9183	77,9649 7215	80,2236 6442	82,5662 4601	66
67	72,8392 6971	74,9319 0052	77,1026 7055	79,3547 9701	81,6916 3580	84,1166 8765	67
68	74,0213 6789	76,1816 7352	78,4239 3168	80,7515 7099	83,1681 7034	85,6774 6557	68
69	75,2064 2131	77,4356 1243	79,7506 9806	82,1553 2885	84,6533 1800	87,2486 4867	69
70	76,3944 3736	78,6937 3114	81,0829 9264	83,5661 0549	86,1471 2902	88,8303 0633	70
71	77,5854 2345	79,9560 4358	82,4208 3844	84,9839 3602	87,6496 5394	90,4225 0837	71
72	78,7793 8701	81,2225 6372	83,7642 5860	86,4088 5570	89,1609 4359	92,0253 2510	72
73	79,9763 3548	82,4933 0560	85,1132 7634	87,8408 9998	90,6810 4909	93,6388 2726	73
74	81,1762 7632	83,7682 8329	86,4679 1499	89,2801 0448	92,2100 2188	95,2630 8611	74
75	82,3792 1701	85,0475 1090	87,8281 9797	90,7265 0500	93,7479 1367	96,8981 7335	75
76	83,5851 6505	86,3310 0260	89,1941 4880	92,1801 3752	95,2947 7650	98,5441 6118	76
77	84,7941 2797	87,6187 7261	90,5657 9108	93,6410 3821	96,8506 6270	100,2011 2225	77
78	86,0061 1329	88,9108 3519	91,9431 4855	95,1092 4340	98,4156 2490	101,8691 2973	78
79	87,2211 2857	90,2072 0464	93,3262 4500	96,5847 8962	99,9897 1604	103,5482 5726	79
80	88,4391 8139	91,5078 9532	94,7151 0435	98,0677 1357	101,5729 8939	105,2385 7898	80
81	89,6602 7934	92,8129 2164	96,1097 5062	99,5580 5214	103,1654 9849	106,9401 6950	81
82	90,8844 3004	94,1222 9804	97,5102 0792	101,0558 4240	104,7672 9723	108,6531 0397	82
83	92,1116 4112	95,4360 3904	98,9165 0045	102,5611 2161	106,3784 3980	110,3774 5799	83
84	93,3419 2022	96,7541 5917	100,3286 5253	104,0739 2722	107,9989 8070	112,1133 0771	84
85	94,5752 7502	98,0766 7303	101,7466 8859	105,5942 9685	109,6289 7475	113,8607 2977	85
86	95,8117 1321	99,4035 9527	103,1706 3312	107,1222 6834	111,2684 7710	115,6198 0130	86
87	97,0512 4249	100,7349 4059	104,6005 1076	108,6578 7968	112,9175 4322	117,3905 9997	87
88	98,2938 7060	102,0707 2373	106,0363 4622	110,2011 6908	114,5762 2889	119,1732 0397	88
89	99,5396 0527	103,4109 5947	107,4781 6433	111,7521 7492	116,2445 9022	120,9676 9200	89
90	100,7884 5429	104,7556 6267	108,9259 9002	113,3109 3580	117,9226 8367	122,7741 4328	90
91	102,0404 2542	106,1048 4821	110,3798 4831	114,8774 9048	119,6105 6599	124,5926 3757	91
92	103,2955 2649	107,4585 3104	111,8397 6434	116,4518 7793	121,3082 9429	126,4232 5515	92
93	104,5537 6530	108,8167 2614	113,3057 6336	118,0341 3732	123,0159 2601	128,2660 7685	93
94	105,8151 4972	110,1794 4856	114,7778 7071	119,6243 0800	124,7335 1891	130,1211 8403	94
95	107,0796 8759	111,5467 1339	116,2561 1184	121,2224 2954	126,4611 3110	131,9886 5859	95
96	108,3473 8681	112,9185 3577	117,7405 1230	122,8285 4169	128,1988 2103	133.8685 8298	96
97	109,6182 5528	114,2949 3089	119,2310 9777	124,4426 8440	129,9466 4749	135,7610 4020	97
98	110,8923 0091	115,6759 1399	120,7278 9401	126,0648 9782	131,7046 6960	137,6661 1380	98
99	112,1695 3167	117,0615 0037	122,2309 2690	127,6952 2231	133,4729 4684	139,5838 8790	99
100	113,4499 5550	118,4517 0537	123,7402 2243	129,3336 9842	135,2515 3903	141,5144 4715	100

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
101	114,7335 8038	119,8465 4439	125,2558 0669	130,9803 6692	137,0405 0634	143,4578 7680	101
102	116,0204 1434	121,2460 3287	126,7777 0589	132,6352 6875	138,8399 0929	145,4142 6264	102
103	117,3104 6537	122,6501 8632	128,3059 4633	134,2984 4509	140,6498 0877	147,3836 9106	103
104	118,6037 4153	124,0590 2027	129,8405 5444	135,9699 3732	142,4702 6598	149,3662 4900	104
105	119,9002 5089	125,4725 5034	131,3815 5675	137,6497 8701	144,3013 4253	151,3620 2399	105
106	121,2000 0152	126,8907 9217	132,9289 7990	139,3380 3594	146,1431 0037	153,3711 0415	106
107	122,5030 0152	128,3137 6148	134,4828 5065	141,0347 2612	147,9956 0178	155,3935 7818	107
108	123,8092 5902	129,7414 7402	136,0431 9586	142,7398 9975	149,8589 0946	157,4295 3537	108
109	125,1187 8217	131,1739 4560	137,6100 4251	144,4535 9925	151,7330 8643	159,4790 6560	109
110	126,4315 7913	132,6111 9208	139,1834 1769	146,1758 6725	153,6181 9610	161,5422 5937	110
111	127,7476 5807	134,0532 2939	140,7633 4859	147,9067 4658	155,5143 0225	163,6192 0777	111
112	129,0670 2722	135,5000 7349	142,3498 6255	149,6462 8032	157,4214 6901	165,7100 0249	112
113	130,3896 9479	136,9517 4040	143,9429 8697	151,3945 1172	159,3397 6091	167,8147 3584	113
114	131,7156 6902	138,4082 4620	145,5427 4942	153,1514 8428	161,2692 4285	169,9335 0074	114
115	133,0449 5820	139,8696 0702	147,1491 7754	154,9172 4170	163,2099 8010	172,0663 9075	115
116	134,3775 7059	141,3358 3905	148,7622 9911	156,6918 2791	165,1620 3832	174,2135 0002	116
117	135,7135 1452	142,8069 5851	150,3821 4203	158,4752 8704	167,1254 8354	176,3749 2335	117
118	137,0527 9830	144,2829 8170	152,0087 3429	160,2676 6348	169,1003 8220	178,5507 5618	118
119	138,3954 3030	145,7639 2498	153,6421 0401	162,0690 0180	171,0868 0109	180,7410 9455	119
120	139,7414 1888	147,2498 0473	155,2822 7945	163,8793 4681	173,0848 0743	182,9460 3518	120
121	141,0907 7242	148,7406 3741	156,9292 8894	165,6987 4354	175,0944 6881	185,1656 7542	121
122	142,4434 9935	150,2364 3953	158,5831 6098	167,5272 3726	177,1158 5321	187,4001 1325	122
123	143,7996 0810	151,7372 2766	160,2439 2415	169,3648 7344	179,1490 2902	189,6494 4734	123
124	145,1591 0712	153,2430 1842	161,9116 0717	171,2116 9781	181,1940 6502	191,9137 7699	124
125	146,5220 0489	154,7538 2848	163,5862 3887	173,0677 5630	183,2510 3040	194,1932 0217	125
126	147,8883 0990	156,2696 7458	165,2678 4819	174,9330 9508	185,3199 9475	196,4878 2352	126
127	149,2580 3068	157,7905 7349	166,9564 6423	176,8077 6056	187,4010 2805	198,7977 4234	127
128	150,6311 7575	159,3165 4207	168,6521 1616	178,6917 9936	189,4942 0071	201,1230 6062	128
129	152,0077 5369	160,8475 9721	170,3548 3331	180,5852 5836	191,5995 8355	203,4638 8103	129
130	153,3877 7308	162,3837 5587	172,0646 4512	182,4881 8465	193,7172 4779	205,8203 0690	130
131	154,7712 4251	163,9250 3506	173,7815 8114	184,4006 2557	195,8472 6507	208,1924 4228	131
132	156,1581 7062	165,4714 5184	175,5056 7106	186,3226 2870	197,9897 0745	210,5803 9190	132
133	157,5485 6604	167,0230 2335	177,2369 4469	188,2542 4184	200,1446 4741	212,9842 6117	133
134	158,9424 3746	168,5797 6676	178,9754 3196	190,1955 1305	202,3121 5785	215,4041 5625	134
135	160,3397 9355	170,1416 9931	180,7211 6293	192,1464 9062	204,4923 1210	217,8401 8396	135
136	161,7406 4304	171,7088 3831	182,4741 6777	194,1072 2307	206,6851 8393	220,2924 5185	136
137	163,1449 9464	173,2812 0111	184,2344 7680	196,0777 5919	208,8908 4750	222,7610 6820	137
138	164,5528 5713	174,8588 0511	186,0021 2046	198,0581 4798	211,1093 7744	225,2461 4198	138
139	165,9642 3927	176,4416 6779	187,7771 2929	200,0484 3872	213,3408 4881	227,7477 8293	139
140	167,3791 4987	178,0298 0669	189,5595 3400	202,0486 8092	215,5853 3710	230,2661 0148	140
141	168,7975 9775	179,6232 3937	191,3493 6539	204,0589 2432	217,8429 1823	232,8012 0883	141
142	170,2195 9174	181,2219 8351	193,1466 5441	206,0792 1894	220,1136 6858	235,3532 1688	142
143	171,6451 4072	182.8260 5678	194,9514 3214	208,1096 1504	222,3976 6498	237,9222 3833	143
144	173,0742 5357	184,4354 7697	196.7637 2977	210.1501 6311	224,6949 8470	240.5083 8659	144
145	174,5069 3921	186,0502 6190	198,5835 7865	212,2009 1393	227,0057 0544	243,1117 7583	145
146	175,9432 0655	187,6704 2944	200,4110 1023	214,2619 1850	229.3299 0539	245.7325 2100	146
147	177,3830 6457	189,2959 9753	202,2460 5610	216,3332 2809	231,6676 6317	248,3707 3781	147
148	178,8265 2223	190,9269 8419	204,0887 4800	218,4148 9423	234,0190 5787	251,0265 4273	148
149	180,2735 8854	192,5634 0747	205,9391 1778	220,5069 6870	236,3841 6904	253,7000 5301	149
150	181,7242 7251	194,2052 8550	207,7971 9744	222,6095 0354	238,7630 7670	256,3913 8670	150

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	$\frac{3}{4}\%$	1%	$1\frac{1}{4}\%$	$1\frac{1}{2}\%$	$1\frac{3}{4}\%$	2%	n
1	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1
2	2,0075 0000	2.0100 0000	2,0125 0000	2,0150 0000	2,0175 0000	2,0200 0000	2
3	3,0225 5625	3,0301 0000	3,0376 5625	3,0452 2500	3,0528 0625	3,0604 0000	3
4	4,0452 2542	4.0604 0100	4,0756 2695	4,0909 0338	4.1062 3036	4.1216 0800	4
5	5,0755 6461	5,1010 0501	5,1265 7229	5,1522 6693	5,1780 8939	5,2040 4016	5
6	6,1136 3135	6,1520 1506	6,1906 5444	6,2295 5093	6,2687 0596	6,3081 2096	6
7	7,1594 8358	7,2135 3521	7,2680 3762	7,3229 9419	7,3784 0831	7,4342 8338	7
8	8,2131 7971	8,2856 7056	8,3588 8809	8,4328 3911	8,5075 3045	8,5829 6905	8
9	9,2747 7856	9.3685 2727	9,4633 7420	9,5593 3169	9,6564 1224	9,7546 2843	9
10	10,3443 3940	10,4622 1254	10,5816 6637	10,7027 2167	10,8253 9945	10,9497 2100	10
11	11,4219 2194	11,5668 3467	11,7139 3720	11,8632 6249	12,0148 4294	12,1687 1542	11
12	12,5075 8636	12,6825 0301	12,8603 6142	13,0412 1143	13,2251 0371	13,4120 8973	12
13	13.6013 9325	13,8093 2804	14,0211 1594	14,2368 2960	14,4565 4303	14,6803 3152	13
14	14,7034 0370	14.9474 2132	15,1963 7988	15,4503 8205	15,7095 3253	15,9739 3815	14
15	15,8136 7923	16,0968 9554	16,3863 3463	16,6821 3778	16,9844 4935	17,2934 1692	15
16	16,9322 8183	17,2578 6449	17,5911 6382	17,9323 6984	18,2816 7721	18,6392 8525	16
17	18,0592 7394	18,4304 4314	18,8110 5336	19,2013 5539	19,6016 0656	20,0120 7096	17
18	19,1947 1849	19,6147 4757	20,0461 9153	20,4893 7572	20,9446 3468	21,4123 1238	18
19	20,3386 7888	20,8108 9504	21,2967 6893	21,7967 1636	22,3111 6578	22,8405 5863	19
20	21,4912 1897	22,0190 0399	22,5629 7854	23,1236 6710	23,7016 1119	24,2973 6980	20
21	22,6524 0312	23,2391 9403	23,8450 1577	24,4705 2211	25,1163 8938	25,7833 1719	21
22	23,8222 9614	24,4715 8598	25,1430 7847	25,8375 7994	26,5559 2620	27,2989 8354	22
23	25,0009 6336	25,7163 0183	26,4573 6695	27,2251 4364	28,0206 5490	28,8449 6321	23
24	26,1884 7059	26,9734 6485	27,7880 8403	28,6335 2080	29,5110 1637	30,4218 6247	24
25	27,3848 8412	28,2431 9950	29,1354 3508	30,0630 2361	31,0274 5915	32,0302 9972	25
26	28,5902 7075	29,5256 3150	30,4996 2802	31,5139 6896	32,5704 3969	33,6709 0572	26
27	29,8046 9778	30,8208 8781	31,8808 7337	32,9866 7850	34,1404 2238	35,3443 2383	27
28	31,0282 3301	32.1290 9669	33,2793 8429	34,4814 7867	35,7378 7977	37,0512 1031	28
29	32,2609 4476	33,4503 8766	34,6953 7659	35,9987 0085	37,3632 9267	38,7922 3451	29
30	33,5029 0184	34,7848 9153	36,1290 6880	37,5386 8137	39,0171 5029	40,5680 7921	30
31	34,7541 7361	36.1327 4045	37,5806 8216	39,1017 6159	40,6999 5042	42,3794 4079	31
32	36,0148 2991	37,4940 6785	39,0504 4069	40,6882 8801	42,4121 9955	44,2270 2961	32
33	37,2849 4113	38.8690 0853	40,5385 7120	42,2986 1233	44,1544 1305	46,1115 7020	33
34	38,5645 7819	40.2576 9862	42,0453 0334	43,9330 9152	45,9271 1527	48,0338 0160	34
35	39,8538 1253	41,6602 7560	43,5708 6963	45,5920 8789	47,7308 3979	49,9944 7763	35
36	41,1527 1612	43,0768 7836	45,1155 0550	47,2759 6921	49,5661 2949	51,9943 6719	36
37	42,4613 6149	44,5076 4714	46,6794 4932	48,9851 0874	51,4335 3675	54,0342 5453	37
38	43,7798 2170	45,9527 2361	48,2926 4243	50,7198 8538	53,3336 2365	56,1149 3962	38
39	45,1081 7037	47,4122 5085	49,8862 2921	52,4806 8366	55,2669 6206	58,2372 3841	39
40	46,4464 8164	48.8863 7336	51,4895 5708	54,2678 9391	57,2341 3390	60.4019 8318	40
41	47,7948 3026	50,3752 3709	53,1331 7654	56,0819 1232	59,2357 3124	62.6100 2284	41
42	49,1532 9148	51,8789 8946	54,7973 4125	57,9231 4100	61.2723 5654	64.8622 2330	42
43	50,5219 4117	53,3977 7936	56,4823 0801	59.7919 8812	63,3446 2278	67,1594 6777	43
44	51,9008 5573	54,9317 5715	58,1883 3687	61,6888 6794	65,4531 5367	69.5026 5712	44
45	53,2901 1215	56,4810 7472	59,9156 9108	63,6142 0096	67.5985 8386	71,8927 1027	45
46	54,6897 8799	58,0458 8547	61,6646 3721	65,5684 1398	69.7815 5908	74,3305 6447	46
47	56,0999 6140	59.6263 4432	63,4354 4518	67,5519 4018	72,0027 3637	76,8171 7576	47
48	57,5207 1111	61,2226 0777	65.2283 8824	69.5652 1929	74,2627 8425	79,3535 1927	48
49	58,9521 1644	62.8348 3385	67,0437 4310	71,6086 9758	76.5623 8298	81,9405 8966	49
50	60.3942 5732	64.4631 8218	68,8817 8989	73,6828 2804	78,9022 2468	84,5794 0145	50

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	$\frac{3}{4}\%$	1%	$1\frac{1}{4}\%$	$1\frac{1}{2}\%$	$1\frac{3}{4}\%$	2%	n
51	61,8472 1424	66,1078 1401	70,7428 1226	75,7880 7046	81,2830 1361	87,2709 8948	51
52	63,3110 6835	67,7688 9215	72,6270 9741	77,9248 9152	83,7054 6635	90,0164 0927	52
53	64,7859 0136	69,4465 8107	74,5349 3613	80,0937 6489	86,1703 1201	92,8167 3746	53
54	66,2717 9562	71,1410 4688	76,4666 2283	82,2951 7136	88,6782 9247	95,6730 7221	54
55	67,7688 3409	72,8524 5735	78,4224 5562	84,5295 9893	91,2301 6259	98,5865 3365	55
56	69,2771 0035	74,5809 8192	80,4027 3631	86,7975 4292	93,8266 9043	101,5582 6432	56
57	70,7966 7860	76,3267 9174	82,4077 7052	89,0995 0606	96,4686 5752	104,5894 2961	57
58	72,3276 5369	78,0900 5966	84,4378 6765	91,4359 9865	99,1568 5902	107,6812 1820	58
59	73,8701 1109	79,8709 6025	86,4933 4099	93,8075 3863	101,8921 0405	110,8348 4257	59
60	75,4241 3693	81,6696 6986	88,5745 0776	96,2146 5171	104,6752 1588	114,0515 3942	60
61	76,9898 1795	83,4863 6655	90,6816 8910	98,6578 7149	107,5070 3215	117,3325 7021	61
62	78,5672 4159	85,3212 3022	92,8152 1022	101,1377 3956	110,3884 0522	120,6792 2161	62
63	80,1564 9590	87,1744 4252	94,9754 0034	103,6548 0565	113,3202 0231	124,0928 0604	63
64	81,7576 6962	89,0461 8695	97,1625 9285	106,2096 2774	116,3033 0585	127,5746 6216	64
65	83,3708 5214	90,9366 4882	99,3771 2526	108,8027 7215	119,3386 1370	131,1261 5541	65
66	84,9961 3353	92,8460 1531	101,6193 3933	111,4348 1374	122,4270 3944	134,7486 7852	66
67	86,6336 0453	94,7744 7546	103,8895 8107	114,1063 3594	125,5695 1263	138,4436 5209	67
68	88,2833 5657	96,7222 2021	106,1882 0083	116,8179 3098	128,7669 7910	142,2125 2513	68
69	89,9454 8174	98,6894 4242	108,5155 5334	119,5701 9995	132,0204 0124	146,0567 7563	69
70	91,6200 7285	100,6763 3684	110,8719 9776	122,3637 5295	135,3307 5826	149,9779 1114	70
71	93,3072 2340	102,6831 0021	113,2578 9773	125,1992 0924	138,6990 4653	153,9774 6937	71
72	95,0070 2758	104,7099 3121	115,6736 2145	128,0771 9738	142,1262 7984	158,0570 1875	72
73	96,7196 8028	106,7570 3052	118,1195 4172	130,9983 5534	145,6134 8974	162,2181 5913	73
74	98,4449 7714	108,8246 0083	120,5960 3599	133,9633 3067	149,1617 2581	166,4625 2231	74
75	100,1833 1446	110,9128 4684	123,1034 8644	136,9727 8063	152,7720 5601	170,7917 7276	75
76	101,9346 8932	113,0219 7530	125,6422 8002	140,0273 7234	156,4455 6699	175,2076 0821	76
77	103,6991 9949	115,1521 9506	128,2128 0852	143,1277 8292	160,1833 6441	179,7117 6038	77
78	105,4769 4349	117,3037 1701	130,8154 6863	146,2746 9967	163,9865 7329	184,3059 9558	78
79	107,2680 2056	119,4767 5418	133,4506 6199	149,4688 2016	167,8563 3832	188,9921 1549	79
80	109,0725 3072	121,6715 2172	136,1187 9526	152,7108 5247	171,7938 2424	193,7719 5780	80
81	110,8905 7470	123,8882 3694	138,8202 8020	156,0015 1525	175,8002 1617	198,6473 9696	81
82	112,7222 5401	126,1271 1931	141,5555 3370	159,3415 3798	179,8767 1995	203,6203 4490	82
83	114,5676 7091	128,3883 9050	144,3249 7787	162,7316 6105	184,0245 6255	208,6927 5180	83
84	116,4269 2845	130,6722 7440	147,1290 4010	166,1726 3597	188,2449 9239	213,8666 0683	84
85	118,3001 3041	132,9789 9715	149,9681 5310	169,6652 2551	192,5392 7976	219,1439 3897	85
86	120,1873 8139	135,3087 8712	152,8427 5501	173,2102 0389	196,9087 1716	224,5268 1775	86
87	122,0887 8675	137,6618 7499	155,7532 8945	176,8083 5695	201,3546 1971	230,0173 5411	87
88	124,0044 5265	140,0384 9374	158,7002 0557	180,4604 8230	205,8783 2555	235,6177 0119	88
89	125,9344 8604	142,4388 7868	161,6839 5814	184,1673 8954	210,4811 9625	241,3300 5521	89
90	127,8789 9469	144,8632 6746	164,7050 0762	187,9299 0038	215,1646 1718	247,1566 5632	90
91	129,8380 8715	147,3119 0014	167,7638 2021	191,7488 4889	219,9299 9798	253,0997 8944	91
92	131,8118 7280	149,7850 1914	170,8608 6796	195,6250 8162	224,7787 7295	259,1617 8523	92
93	133,8004 6185	152,2828 6933	173,9966 2881	199,5594 5784	229,7124 0148	265,3450 2094	93
94	135,8039 6531	154,8056 9803	177,1715 8667	203,5528 4971	234,7323 6850	271,6519 2135	94
95	137,8224 9505	157,3537 5501	180,3862 3151	207,6061 4246	239,8401 8495	278,0849 5978	95
96	139,8561 6377	159,9272 9256	183,6410 5940	211,7202 3459	245,0373 8819	284,6466 5898	96
97	141,9050 8499	162,5265 6548	186,9365 7264	215,8960 3811	250,3255 4248	291,3395 9216	97
98	143,9693 7313	165,1518 3114	190,2732 7980	220,1344 7868	255,7062 3947	298,1663 8400	98
99	146,0491 4343	167,8033 4945	193,6516 9580	224,4364 9586	261,1810 9866	305,1297 1168	99
100	148,1445 1201	170,4813 8294	197,0723 4200	228,8030 4330	266,7517 6789	312,2323 0591	100

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%	n
1	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1
2	2,0250 0000	2,0300 0000	2,0350 0000	2,0400 0000	2,0450 0000	2,0500 0000	2
3	3,0756 2500	3,0909 0000	3,1062 2500	3,1216 0000	3,1370 2500	3,1525 0000	3
4	4,1525 1563	4,1836 2700	4,2149 4288	4,2464 6400	4,2781 9113	4,3101 2500	4
5	5,2563 2852	5,3091 3581	5,3624 6588	5,4163 2256	5,4707 0973	5,5256 3125	5
6	6,3877 3673	6,4684 0988	6,5501 5218	6,6329 7546	6,7168 9166	6,8019 1281	6
7	7,5474 3015	7,6624 6218	7,7794 0751	7,8982 9448	8,0191 5179	8,1420 0845	7
8	8,7361 1590	8,8923 3605	9,0516 8677	9,2142 2626	9,3800 1362	9,5491 0888	8
9	9,9545 1880	10,1591 0613	10,3684 9581	10,5827 9531	10,8021 1423	11,0265 6432	9
10	11,2033 8177	11,4638 7931	11,7313 9316	12,0061 0712	12,2882 0937	12,5778 9254	10
11	12,4834 6631	12,8077 9569	13,1419 9192	13,4863 5141	13,8411 7879	14,2067 8716	11
12	13,7955 5297	14,1920 2956	14,6019 6164	15,0258 0546	15,4640 3184	15,9171 2652	12
13	15,1404 4179	15,6177 9045	16,1130 3030	16,6268 3768	17,1599 1327	17,7129 8285	13
14	16,5189 5284	17,0863 2416	17,6769 8636	18,2919 1119	18,9321 0937	19,5986 3199	14
15	17,9319 2666	18,5989 1389	19,2956 8088	20,0235 8764	20,7840 5429	21,5785 6359	15
16	19,3802 2483	20,1568 8130	20,9710 2971	21,8245 3114	22,7193 3673	23,6574 9177	16
17	20,8647 3045	21,7615 8774	22,7050 1575	23,6975 1239	24,7417 0689	25,8403 6636	17
18	22,3863 4871	23,4144 3537	24,4996 9130	25,6454 1288	26,8550 8370	28,1323 8467	18
19	23,9460 0743	25,1168 6844	26,3571 8050	27,6712 2940	29,0635 6246	30,5390 0391	19
20	25,5446 5761	26,8703 7449	28,2796 8181	29,7780 7858	31,3714 2277	33,0659 5410	20
21	27,1832 7405	28,6764 8572	30,2694 7068	31,9692 0172	33,7831 3680	35,7192 5181	21
22	28,8628 5590	30,5367 8030	32,3289 0215	34,2479 6979	36,3033 7795	38,5052 1440	22
23	30,5844 2730	32,4528 8370	34,4604 1373	36,6178 8858	38,9370 2996	41,4304 7512	23
24	32,3490 3798	34,4264 7022	36,6665 2821	39,0826 0412	41,6891 9631	44,5019 9887	24
25	34,1577 6393	36,4592 6432	38,9498 5669	41,6459 0829	44,5652 1015	47,7270 9882	25
26	36,0117 0803	38,5530 4225	41,3131 0168	44,3117 4462	47,5706 4460	51,1134 5376	26
27	37,9120 0073	40,7096 3352	43,7590 6024	47,0842 1440	50,7113 2361	54,6691 2645	27
28	39,8598 0075	42,9309 2252	46,2906 2734	49,9675 8298	53,9933 3317	58,4025 8277	28
29	41,8562 9577	45,2188 5020	48,9107 9930	52,9662 8630	57,4230 3316	62,3227 1191	29
30	43,9027 0316	47,5754 1571	51,6226 7728	56,0849 3775	61,0070 6966	66,4388 4750	30
31	46,0002 7074	50,0026 7818	54,4294 7098	59,3283 3526	64,7523 8779	70,7607 8988	31
32	48,1502 7751	52,5027 5852	57,3345 0247	62,7014 6867	68,6662 4524	75,2988 2937	32
33	50,3540 3445	55,0778 4128	60,3412 1005	66,2095 2742	72,7562 2628	80,0637 7084	33
34	52,6128 8531	57,7301 7652	63,4531 5240	69,8579 0851	77,0302 5646	85,0669 5938	34
35	54,9282 0744	60,4620 8181	66,6740 1274	73,6522 2486	81,4966 1800	90,3203 0735	35
36	57,3014 1263	63,2759 4427	70,0076 0318	77,5983 1385	86,1639 6581	95,8363 2272	36
37	59,7339 4794	66,1742 2259	73,4578 6930	81,7022 4640	91,0413 4427	101,6281 3886	37
38	62,2272 9664	69,1594 4927	77,0288 9472	85,9703 3626	96,1382 0476	107,7095 4580	38
39	64,7829 7906	72,2342 3275	80,7249 0604	90,4091 4971	101,4644 2398	114,0950 2309	39
40	67,4025 5354	75,4012 5973	84,5502 7775	95,0255 1570	107,0303 2306	120,7997 7424	40
41	70,0876 1737	78,6632 9753	88,5095 3747	99,8265 3633	112,8466 8760	127,8397 6295	41
42	72,8398 0781	82,0231 9645	92,6073 7128	104,8195 9778	118,9247 8854	135,2317 5110	42
43	75,6608 0300	85,4838 9234	96,8486 2928	110,0123 8169	125,2764 0402	142,9933 3866	43
44	78,5523 2308	89,0484 0911	101,2383 3130	115,4128 7696	131,9138 4220	151,1430 0559	44
45	81,5161 3116	92,7198 6139	105,7816 7290	121,0293 9204	138,8499 6510	159,7001 5587	45
46	84,5540 3443	96,5014 5723	110,4840 3145	126,8705 6772	146,0982 1353	168,6851 6366	46
47	87,6678 8530	100,3965 0095	115,3509 7255	132,9453 9043	153,6726 3314	178,1194 2185	47
48	90,8595 8243	104,4083 9598	120,3882 5659	139,2632 0604	161,5879 0163	188,0253 9294	48
49	94,1310 7199	108,5406 4785	125,6018 4557	145,8337 3429	169,8593 5720	198,4266 6259	49
50	97,4843 4879	112,7968 6729	130,9979 1016	152,6670 8366	178,5030 2828	209,3479 9572	50

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	2½%	3%	3½%	4%	4½%	5%	n
51	100.9214 5751	117,1807 7331	136,5828 3702	159,7737 6700	187,5356 6455	220,8153 9550	51
52	104.4444 9395	121,6961 9651	142,3632 3631	167,1647 1768	196,9747 6946	232,8561 6528	52
53	108.0556 0629	126,3470 8240	148,3459 4958	174,8513 0639	206,8386 3408	245,4989 7354	53
54	111,7569 9645	131,1374 9488	154,5380 5782	182,8453 5865	217,1463 7262	258,7739 2222	54
55	115,5509 2136	136,0716 1972	160,9468 8984	191,1591 7299	227,9179 5938	272,7126 1833	55
56	119.4396 9440	141,1537 6831	167,5800 3099	199,8055 3991	239,1742 6756	287,3482 4924	56
57	123,4256 8676	146,3883 8136	174,4453 3207	208,7977 6151	250,9371 0960	302,7156 6171	57
58	127,5113 2893	151,7800 3280	181,5509 1869	218,1496 7197	263,2292 7953	318,8514 4479	58
59	131,6991 1215	157,3334 3379	188,9052 0085	227,8756 5885	276,0745 9711	335,7940 1703	59
60	135,9915 8995	163,0534 3680	196,5168 8288	237,9906 8520	289,4979 5398	353,5837 1788	60
61	140.3913 7970	168,9450 3991	204,3949 7378	248,5103 1261	303,5253 6190	372,2629 0378	61
62	144.9011 6419	175,0133 9110	212,5487 9786	259,4507 2511	318,1840 0319	391,8760 4897	62
63	149.5236 9330	181,2637 9284	220,9880 0579	270,8287 5412	333,5022 8333	412,4698 5141	63
64	154,2617 8563	187,7017 0662	229,7225 8599	282,6619 0428	349,5098 8608	434,0933 4398	64
65	159.1183 3027	194,3327 5782	238,7628 7650	294,9683 8045	366,2378 3096	456,7980 1118	65
66	164,0962 8853	201,1627 4055	248,1195 7718	307,7671 1567	383,7185 3335	480,6379 1174	66
67	169,1986 9574	208,1976 2277	257,8037 6238	321,0778 0030	401,9858 6735	505,6698 0733	67
68	174,4286 6314	215,4435 5145	267,8268 9406	334,9209 1231	421,0752 3138	531,9532 9770	68
69	179,7893 7971	222,9068 5800	278,2008 3535	349,3177 4880	441,0236 1679	559,5509 6258	69
70	185,2841 1421	230,5940 6374	288,9378 6459	364,2904 5876	461,8696 7955	588,5285 1071	70
71	190,9162 1706	238,5118 8565	300,0506 8985	379,8620 7711	483,6538 1513	618,9549 3625	71
72	196,6891 2249	246,6672 4222	311,5524 6400	396,0565 6019	506,4182 3681	650,9026 8306	72
73	202,6063 5055	255,0672 5949	323,4568 0024	412,8988 2260	530,2070 5747	684,4478 1721	73
74	208,6715 0931	263,7192 7727	335,7777 8824	430,4147 7550	555,0663 7505	719,6702 0807	74
75	214,8882 9705	272,6308 5559	348,5300 1083	448,6313 6652	581,0443 6193	756,6537 1848	75
76	221,2605 0447	281,8097 8126	361,7285 6121	467,5766 2118	608,1913 5822	795,4864 0440	76
77	227,7920 1709	291,2640 7469	375,3890 6085	487,2796 8603	636,5599 6934	836,2607 2462	77
78	234,4868 1751	301,0019 9693	389,5276 7798	507,7708 7347	666,2051 6796	879,0737 6085	78
79	241,3489 8795	311,0320 5684	404,1611 4671	529,0817 0841	697,1844 0052	924,0274 4889	79
80	248,3827 1265	321,3630 1855	419,3067 8685	551,2449 7675	729,5576 9854	971,2288 2134	80
81	255,5922 8047	332,0039 0910	434,9825 2439	574,2947 7582	763,3877 9497	1020,7902 6240	81
82	262,9820 8748	342,9640 2638	451,2069 1274	598,2665 6685	798,7402 4575	1072,8297 7552	82
83	270,5566 3966	354,2529 4717	467,9991 5469	623,1972 2952	835,6835 5680	1127,4712 6430	83
84	278,3205 5566	365,8805 3558	485,3791 2510	649,1251 1870	874,2893 1686	1184,8448 2752	84
85	286,2785 6955	377,8569 5165	503,3673 9448	676,0901 2345	914,6323 3612	1245,0870 6889	85
86	294,4355 3379	390,1926 6020	521,9852 5329	704,1337 2839	956,7907 9125	1308,3414 2234	86
87	302,7964 2213	402,8984 4001	541,2547 3715	733,2990 7753	1000,8463 7685	1374,7584 9345	87
88	311,3663 3268	415,9853 9321	561,1986 5295	763,6310 4063	1046,8844 6381	1444,4964 1812	88
89	320,1504 9100	429,4649 5500	581,8406 0581	795,1762 8225	1094,9942 6468	1517,7212 3903	89
90	329,1542 5328	443,3489 0365	603,2050 2701	827,9833 3354	1145,2690 0659	1594,6073 0098	90
91	338,3831 0961	457,6493 7076	625,3172 0295	862,1026 6688	1197,8061 1189	1675,3376 6603	91
92	347,8426 8735	472,3788 5189	648,2033 0506	897,5867 7356	1252,7073 8692	1760,1045 4933	92
93	357,5387 5453	487,5502 1744	671,8904 2073	934,4902 4450	1310,0792 1933	1849,1097 7680	93
94	367,4772 2339	503,1767 2397	696,4065 8546	972,8698 5428	1370,0327 8420	1942,5652 6564	94
95	377,6641 5398	519,2720 2568	721,7808 1595	1012,7846 4845	1432,6842 5949	2040,6935 2892	95
96	388,1057 5783	535,8501 8645	748,0431 4451	1054,2960 3439	1498,1550 5117	2143,7282 0537	96
97	398,8084 0177	552,9256 9205	775,2246 5457	1097,4678 7577	1566,5720 2847	2251,9146 1564	97
98	409,7786 1182	570,5134 6281	803,3575 1748	1142,3665 9080	1638,0677 6976	2365,5103 4642	98
99	421,0230 7711	588,6288 6669	832,4750 3059	1189,0612 5443	1712,7808 1939	2484,7858 6374	99
100	432,5486 5404	607,2877 3270	862,6116 5666	1237,6237 0461	1790,8559 5627	2610,0251 5693	100

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	5½%	6%	6½%	7%	7½%	8%	n
1	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1
2	2,0550 0000	2,0600 0000	2,0650 0000	2,0700 0000	2,0750 0000	2,0800 0000	2
3	3,1680 2500	3,1836 0000	3,1992 2500	3,2149 0000	3,2306 2500	3,2464 0000	3
4	4,3422 6638	4,3746 1600	4,4071 7463	4,4399 4300	4,4729 2188	4,5061 1200	4
5	5,5810 9103	5,6370 9296	5,6936 4098	5,7507 3901	5,8083 9102	5,8666 0096	5
6	6,8880 5103	6,9753 1854	7,0637 2764	7,1532 9074	7,2440 2034	7,3359 2904	6
7	8,2668 9384	8,3938 3765	8,5228 6994	8,6540 2109	8,7873 2187	8,9228 0336	7
8	9,7215 7300	9,8974 6791	10,0768 5648	10,2598 0257	10,4463 7101	10,6366 2763	8
9	11,2562 5951	11,4913 1598	11,7318 5215	11,9779 8875	12,2298 4883	12,4875 5784	9
10	12,8753 5379	13,1807 9494	13,4944 2254	13,8164 4796	14,1470 8750	14,4865 6247	10
11	14,5834 9825	14,9716 4264	15,3715 6001	15,7835 9932	16,2081 1906	16,6454 8746	11
12	16,3855 9065	16,8699 4120	17,3707 1141	17,8884 5127	18,4237 2799	18,9771 2646	12
13	18,2867 9814	18,8821 3767	19,4998 0765	20,1406 4286	20,8055 0759	21,4952 9658	13
14	20,2925 7203	21,0150 6593	21,7672 9515	22,5504 8786	23,3659 2066	24,2149 2030	14
15	22,4086 6350	23,2759 6988	24,1821 6933	25,1290 2201	26,1183 6470	27,1521 1393	15
16	24,6411 3999	25,6725 2808	26,7540 1034	27,8880 5355	29,0772 4206	30,3242 8304	16
17	26,9964 0269	28,2128 7976	29,4930 2101	30,8402 1730	32,2580 3521	33,7502 2569	17
18	29,4812 0483	30,9056 5255	32,4100 6738	33,9990 3251	35,6773 8785	37,4502 4374	18
19	32,1026 7110	33,7599 9170	35,5167 2176	37,3789 6479	39,3531 9194	41,4462 6324	19
20	34,8683 1801	36,7855 9120	38,8253 0867	40,9954 9232	43,3046 8134	45,7619 6430	20
21	37,7860 7550	39,9927 2668	42,3489 5373	44,8651 7678	47,5525 3244	50,4229 2144	21
22	40,8643 0965	43,3922 9028	46,1016 3573	49,0057 3916	52,1189 7237	55,4567 5516	22
23	44,1118 4669	46,9958 2769	50,0982 4205	53,4361 4090	57,0278 9530	60,8932 9557	23
24	47,5379 9825	50,8155 7735	54,3546 2778	58,1766 7076	62,3049 8744	66,7647 5922	24
25	51,1525 8816	54,8645 1200	58,8876 7859	63,2490 3772	67,9778 6150	73,1059 3995	25
26	54,9659 8051	59,1563 8272	63,7153 7769	68,6764 7036	74,0762 0112	79,9544 1515	26
27	58,9891 0943	63,7057 6568	68,8568 7725	74,4838 2328	80,6319 1620	87,3507 6836	27
28	63,2335 1045	68,5281 1162	74,3325 7427	80,6976 9091	87,6793 0991	95,3388 2983	28
29	67,7113 5353	73,6397 9832	80,1641 9159	87,3465 2927	95,2552 5816	103,9659 3622	29
30	72,4354 7797	79,0581 8622	86,3748 6405	94,4607 8632	103,3994 0252	113,2832 1111	30
31	77,4194 2926	84,8016 7739	92,9892 3021	102,0730 4137	112,1543 5771	123,3458 6800	31
32	82,6774 9787	90,8897 7803	100,0335 3017	110,2181 5426	121,5659 3454	134,2135 3744	32
33	88,2247 6025	97,3431 6471	107,5357 0963	118,9334 2506	131,6833 7963	145,9506 2044	33
34	94,0771 2207	104,1837 5460	115,5255 3076	128,2587 6481	142,5596 3310	158,6266 7007	34
35	100,2513 6378	111,4347 7987	124,0346 9026	138,2368 7835	154,2516 0558	172,3168 0368	35
36	106,7651 8879	119,1208 6666	133,0969 4513	148,9134 5984	166,8204 7600	187,1021 4797	36
37	113,6372 7417	127,2681 1866	142,7482 4656	160,3374 0202	180,3320 1170	203,0703 1981	37
38	120,8873 2425	135,9042 0578	153,0268 8259	172,5610 2017	194,8569 1258	220,3159 4540	38
39	128,5361 2708	145,0584 5813	163,9736 2996	185,6402 9158	210,4711 8102	238,9412 2103	39
40	136,6056 1407	154,7619 6562	175,6319 1590	199,6351 1199	227,2565 1960	259,0565 1871	40
41	145,1189 2285	165,0476 8356	188,0479 9044	214,6095 6983	245,3007 5857	280,7810.4021	41
42	154,1004 6360	175,9505 4457	201,2711 0981	230,6322 3972	264,6983 1546	304,2435 2342	42
43	163,5759 8910	187,5075 7724	215,3537 3195	247,7764 9650	285,5506 8912	329,5830 0530	43
44	173,5726 6850	199,7580 3188	230,3517 2453	266,1208 5125	307,9669 9080	356,9496 4572	44
45	184,1191 6527	212,7435 1379	246,3245 8662	285,7493 1084	332,0645 1511	386,5056 1738	45
46	195,2457 1936	226,5081 2462	263,3356 8475	306,7517 6260	357,9693 5375	418,4260 6677	46
47	206,9842 3392	241,0986 1210	281,4525 0426	329,2243 8598	385,8170 5528	452,9001 5211	47
48	219,3683 6679	256,5645 2882	300,7469 1704	353,2700 9300	415,7533 3442	490,1321 6428	48
49	232,4336 2696	272,9584 0055	321,2954 6665	378,9989.9951	447,9348 3451	530,3427 3742	49
50	246,2174 7645	290,3359 0458	343,1796 7198	406,5289 2947	482,5299 4709	573,7701 5642	50

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
1	0,9975 0623	0,9966 7774	0,9958 5062	0,9950 2488	0,9942 0050	0,9933 7748	1
2	1,9925 2492	1,9900 4426	1,9875 6908	1,9850 9938	1,9826 3513	1,9801 7631	2
3	2,9850 6227	2,9801 1056	2,9751 7253	2,9702 4814	2,9653 3732	2,9604 4004	3
4	3,9751 2446	3,9668 8760	3,9586 7804	3,9504 9566	3,9423 4034	3,9342 1196	4
5	4,9627 1766	4,9503 8631	4,9381 0261	4,9258 6633	4,9136 7722	4,9015 3506	5
6	5,9478 4804	5,9306 1759	5,9134 6318	5,8963 8441	5,8793 8083	5,8624 5205	6
7	6,9305 2174	6,9075 9228	6,8847 7661	6,8620 7404	6,8394 8384	6,8170 0535	7
8	7,9107 4487	7,8813 2121	7,8520 5970	7,8229 5924	7,7940 1874	7,7652 3710	8
9	8,8885 2357	8,8518 1516	8,8153 2916	8,7790 6392	8,7430 1780	8,7071 8917	9
10	9,8638 6391	9,8190 8487	9,7746 0165	9,7304 1186	9,6865 1314	9,6429 0315	10
11	10,8367 7198	10,7831 4107	10,7298 9376	10,6770 2673	10,6245 3667	10,5724 2035	11
12	11,8072 5384	11,7439 9442	11,6812 2200	11,6189 3207	11,5571 2014	11,4957 8180	12
13	12,7753 1555	12,7016 5557	12,6286 0283	12,5561 5131	12,4842 9509	12,4130 2828	13
14	13,7409 6314	13,6561 3512	13,5720 5261	13,4887 0777	13,4060 9288	13,3242 0028	14
15	14,7042 0264	14,6074 4364	14,5115 8766	14,4166 2465	14,3225 4470	14,2293 3802	15
16	15,6650 4004	15,5555 9167	15,4472 2422	15,3399 2502	15,2336 8156	15,1284 8148	16
17	16,6234 8133	16,5005 8970	16,3789 7848	16,2586 3186	16,1395 3427	16,0216 7035	17
18	17,5795 3250	17,4424 4821	17,3068 6654	17,1727 6802	17,0401 3350	16,9089 4405	18
19	18,5331 9950	18,3811 7762	18,2309 0443	18,0823 5624	17,9355 0969	17,7903 4177	19
20	19,4844 8828	19,3167 8832	19,1511 0815	18,9874 1915	18,8256 9315	18,6659 0242	20
21	20,4334 0477	20,2492 9069	20,0674 9359	19,8879 7925	19,7107 1398	19,5356 6466	21
22	21,3799 5488	21,1786 9504	20,9800 7661	20,7840 5896	20,5906 0213	20,3996 6688	22
23	22,3241 4452	22,1050 1167	21,8888 7297	21,6756 8055	21,4653 8738	21,2579 4723	23
24	23,2659 7957	23,0282 5083	22,7938 9839	22,5628 6622	22,3350 9930	22,1105 4361	24
25	24,2054 6591	23,9484 2275	23,6951 6853	23,4456 3803	23,1997 6732	22,9574 9365	25
26	25,1426 0939	24,8655 3763	24,5926 9895	24,3240 1794	24,0594 2070	23,7988 3475	26
27	26,0774 1585	25,7796 0561	25,4865 0517	25,1980 2780	24,9140 8852	24,6346 0406	27
28	27,0098 9112	26,6906 3682	26,3766 0266	26,0676 8936	25,7637 9968	25,4648 3847	28
29	27,9400 4102	27,5986 4135	27,2630 0680	26,9330 2423	26,6085 8295	26,2895 7464	29
30	28,8678 7134	28,5036 2925	28,1457 3291	27,7940 5397	27,4484 6689	27,1088 4898	30
31	29,7933 8787	29,4056 1055	29,0247 9626	28,6507 9997	28,2834 7993	27,9226 9766	31
32	30,7165 9638	30,3045 9523	29,9002 1205	29,5032 8355	29,1136 5030	28,7311 5662	32
33	31,6375 0262	31,2005 9325	30,7719 9540	30,3515 2592	29,9390 0610	29,5342 6154	33
34	32,5561 1234	32,0936 1454	31,6401 6139	31,1955 4818	30,7595 7524	30,3320 4789	34
35	33,4724 3126	32,9836 6898	32,5047 2504	32,0353 7132	31,5753 8549	31,1245 5088	35
36	34,3864 6510	33,8707 6642	33,3657 0128	32,8710 1624	32,3864 6445	31,9118 0551	36
37	35,2982 1955	34,7549 1670	34,2231 0501	33,7025 0372	33,1928 3955	32,6938 4653	37
38	36,2077 0030	35,6361 2960	35,0769 5105	34,5298 5445	33,9945 3808	33,4707 0848	38
39	37,1149 1302	36,5144 1488	35,9272 5416	35,3530 8900	34,7915 8716	34,2424 2564	39
40	38,0198 6336	37,3897 8228	36,7740 2904	36,1722 2786	35,5840 1374	35,0090 3209	40
41	38,9225 5697	38,2622 4147	37,6172 9033	36,9872 9141	36,3718 4465	35,7705 6168	41
42	39,8229 9947	39,1318 0213	38,4570 5261	37,7982 9991	37,1551 0653	36,5270 4803	42
43	40,7211 9648	39,9984 7388	39,2933 3040	38,6052 7354	37,9338 2588	37,2785 2453	43
44	41,6171 5359	40,8622 6633	40,1261 3816	39,4082 3238	38,7080 2904	38,0250 2437	44
45	42,5108 7640	41,7231 8903	40,9554 9028	40,2071 9640	39,4777 4221	38,7665 8050	45
46	43,4023 7047	42,5812 5153	41,7814 0111	41,0021 8547	40,2429 9143	39,5032 2566	46
47	44,2916 4137	43,4364 6332	42,6038 8492	41,7932 1937	41,0038 0258	40,2349 9238	47
48	45,1786 9463	44,2888 3387	43,4229 5594	42,5803 1778	41,7602 0141	40,9619 1296	48
49	46,0635 3580	45,1383 7263	44,2386 2832	43,3635 0028	42,5122 1349	41,6840 1949	49
50	46.9461 7037	45,9850 8900	45,0509 1617	44,1427 8635	43,2598 6428	42,4013 4387	50

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
51	47,8266 0386	46,8289 9236	45,8598 3353	44,9181 9537	44,0031 7907	43,1139 1775	51
52	48,7048 4176	47,6700 9205	46,6653 9439	45,6897 4664	44,7421 8301	43,8217 7260	52
53	49,5808 8953	48,5083 9739	47,4676 1267	46,4574 5934	45,4769 0108	44,5249 3967	53
54	50,4547 5265	49,3439 1767	48,2665 0224	47,2213 5258	46,2073 5816	45,2234 5000	54
55	51,3264 3656	50,1766 6213	49,0620 7692	47,9814 4535	46,9335 7895	45,9173 3444	55
56	52,1959 4669	51,0066 3999	49,8543 5046	48,7377 5657	47,6555 8802	46,6066 2362	56
57	53,0632 8847	51,8338 6046	50,6433 3656	49,4903 0505	48,3734 0980	47,2913 4796	57
58	53,9284 6730	52,6583 3268	51,4290 4885	50,2391 0950	49,0870 6856	47,9715 3771	58
59	54,7914 8858	53,4800 6580	52,2115 0093	50,9841 8855	49,7965 8846	48,6472 2289	59
60	55,6523 5769	54,2990 6890	52,9907 0632	51,7255 6075	50,5019 9350	49,3184 3334	60
61	56,5110 7999	55,1153 5106	53,7666 7850	52,4632 4453	51,2033 0754	49,9851 9868	61
62	57,3676 6083	55,9289 2133	54,5394 3087	53,1972 5824	51,9005 5431	50,6475 4836	62
63	58,2221 0557	56,7397 8870	55,3089 7680	53,9276 2014	52,5937 5739	51,3055 1161	63
64	59,0744 1952	57,5479 6216	56,0753 2959	54,6543 4839	53,2829 4024	51,9591 1749	64
65	59,9246 0800	58,3534 5065	56,8385 0250	55,3774 6109	53,9681 2617	52,6083 9486	65
66	60,7726 7631	59,1562 6311	57,5985 0871	56,0969 7621	54,6493 3836	53,2533 7238	66
67	61,6186 2974	59,9564 0842	58,3553 6137	56,8129 1165	55,3265 9986	53,8940 7852	67
68	62,4624 7355	60,7538 9543	59,1090 7357	57,5252 8522	55,9999 3358	54,5305 4158	68
69	63,3042 1302	61,5487 3299	59,8596 5832	58,2341 1465	56,6693 6230	55,1627 8965	69
70	64,1438 5339	62,3409 2989	60,6071 2862	58,9394 1756	57,3349 0867	55,7908 5064	70
71	64,9813 9989	63,1304 9490	61,3514 9738	59,6412 1151	57,9965 9520	56,4147 5230	71
72	65,8168 5774	63,9174 3678	62,0927 7748	60,3395 1394	58,6544 4427	57,0345 2215	72
73	66,6502 3216	64,7017 6424	62,8309 8172	61,0343 4222	59,3084 7815	57,6501 8756	73
74	67,4815 2834	65,4834 8595	63,5661 2287	61,7257 1366	59,9587 1896	58,2617 7573	74
75	68,3107 5146	66,2626 1058	64,2982 1365	62,4136 4543	60,6051 8869	58,8693 1363	75
76	69,1379 0670	67,0391 4676	65,0272 6670	63,0981 5466	61,2479 0922	59,4728 2811	76
77	69,9629 9920	67,8131 0308	65,7532 9464	63,7792 5836	61,8869 0229	60,0723 4581	77
78	70,7860 3411	68,5844 8812	66,4763 1002	64,4569 7350	62,5221 8952	60,6678 9319	78
79	71,6070 1657	69,3533 1042	67,1963 2533	65,1313 1691	63,1537 9239	61,2594 9654	79
80	72,4259 5169	70,1195 7849	67,9133 5303	65,8023 0538	63,7817 3229	61,8471 8200	80
81	73,2428 4458	70,8833 0082	68,6274 0550	66,4699 5561	64,4060 3044	62,4309 7549	81
82	74,0577 0033	71,6444 8587	69,3384 9511	67,1342 8419	65,0267 0798	63,0109 0281	82
83	74,8705 2402	72,4031 4206	70,0466 3413	67,7953 0765	65,6437 8590	63,5869 8954	83
84	75,6813 2072	73,1592 7780	70,7518 3482	68,4530 4244	66,2572 8507	64,1592 6114	84
85	76,4900 9548	73,9129 0146	71,4541 0936	69,1075 0491	66,8672 2625	64,7277 4285	85
86	77,2968 5335	74,6640 2139	72.1534 6991	69,7587 1135	67,4736 3007	65,2924 5979	86
87	78,1015 9935	75,4126 4591	72.8499 2854	70,4066 7796	68,0765 1706	65,8534 3687	87
88	78,9043 3850	76,1587 8330	73,5434 9730	71,0514 2086	68,6759 0759	66,4106 9888	88
89	79,7050 7581	76,9024 4182	74,2341 8818	71,6929 5608	69,2718 2197	66,9642 7041	89
90	80,5038 1627	77,6436 2972	74,9220 1313	72,3312 9958	69,8642 8033	67,5141 7591	90
91	81,3005 6486	78,3823 5521	75,6069 8403	72.9664 6725	70,4533 0273	68,0604 3964	91
92	82,0953 2654	79,1186 2645	76,2891 1272	73,5984 7487	71,0389 0910	68,6030 8574	92
93	82,8881 0628	79,8524 5161	76,9684 1101	74,2273 3818	71,6211 1923	69,1421 3815	93
94	83,6789 0900	80,5838 3882	77,6448 9063	74,8530 7282	72.1999 5284	69,6776 2068	94
95	84,4677 3966	81,3127 9616	78,3185 6329	75.4756 9434	72,7754 2950	70,2095 5696	95
96	85,2546 0315	82,0393 3172	78.9894 4062	76,0952 1825	73.3475 6869	70,7379 7049	96
97	86,0395 0439	82,7534 5355	79.6575 3422	76.7116 5995	73,9163 8975	71,2628 8460	97
98	86,8224 4827	83,4851 6965	80,3228 5566	77,3250 3478	74,4819 1193	71,7843 2245	98
99	87,6034 3967	84,2044 8802	80,9854 1642	77,9353 5799	75,0441 5436	72,3023 0707	99
100	88.3824 8346	84,9214 1663	81,6452 2797	78,5426 4477	75,6031 3606	72,8168 6132	100

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
101	89.1595 8450	85.6359 6342	82.3023 0172	79,1469 1021	76.1588 7596	73,3280 0794	101
102	89,9347 4763	86.3481 3630	82,9566 4901	79,7481 6937	76.7113 9283	73,8357 6948	102
103	90.7079 7768	87.0579 4515	83.6082 8117	80,3464 3718	77,2607 0538	74,3401 6835	103
104	91,4792 7948	87.7658 9185	84.2572 0947	80,9417 2854	77.8068 3219	74,8412 2684	104
105	92,2486 5784	88.4704 9021	84,9034 4511	81,5340 5825	78,3497 9174	75,3389 6706	105
106	93.0161 1755	89,1732 4606	85.5469 9928	82,1234 4104	78,8896 0240	75,8334 1099	106
107	93,7816 6339	89,8736 6717	86.1878 8310	82,7098 9158	79,4262 8241	76,3245 8045	107
108	94.5453 0014	90,5717 6130	86,8261 0765	83,2934 2446	79,9598 4996	76,8124 9714	108
109	95,3070 3256	91,2675 3618	87,4616 8397	83,8740 5419	80,4903 2307	77,2971 8259	109
110	96.0668 6539	91,9609 9951	88,0946 2304	84,4517 9522	81,0177 1971	77,7786 5820	110
111	96.8248 0338	92,6521 5898	88.7249 3581	85,0266 6191	81,5420 5770	78,2569 4523	111
112	97.5808 5126	93,3410 2224	89,3526 3317	85,5986 6856	82,0633 5480	78,7320 6480	112
113	98.3350 1372	94,0275 9692	89,9777 2598	86,1678 2942	82,5816 2863	79,2040 3788	113
114	99.0872 9548	94,7118 9062	90.6002 2504	86,7341 5862	83,0968 9674	79,6728 8531	114
115	99.8377 0123	95,3939 1092	91,2201 4112	87,2976 7027	83,6091 7654	80,1386 2779	115
116	100.5862 3564	96.0736 6536	91.8374 8493	87.8583 7838	84,1184 8537	80,6012 8589	116
117	101,3329 0338	96,7511 6149	92.4522 6715	88.4162 9690	84,6248 4047	81,0608 8002	117
118	102,0777 0911	97.4264 0680	93.0644 9841	88,9714 3970	85,1282 5896	81,5174 3048	118
119	102,8206 5747	98,0994 0877	93,6741 8929	89,5238 2059	85,6287 5787	81,9709 5743	119
120	103,5617 5308	98,7701 7486	94,2813 5033	90,0734 5333	86,1263 5414	82,4214 8089	120
121	104,3010 0058	99,4387 1248	94,8859 9203	90,6203 5157	86,6210 6460	82,8690 2076	121
122	105,0384 0457	100,1050 2905	95,4881 2484	91,1645 2892	87,1129 0598	83,3135 9678	122
123	105,7739 6965	100,7691 3195	96,0877 5918	91,7059 9893	87,6018 9493	83,7552 2859	123
124	106,5077 0040	101,4310 2852	96,6849 0541	92,2447 7505	88,0880 4798	84,1939 3568	124
125	107,2396 0139	102,0907 2610	97,2795 7385	92,7808 7070	88,5713 8159	84,6297 3743	125
126	107,9696 7720	102,7482 3199	97,8717 7479	93,3142 9921	89,0519 1210	85,0626 5308	126
127	108,6979 3237	103,4035 5348	98,4615 1846	93,8450 7384	89,5296 5577	85,4927 0173	127
128	109,4243 7144	104,0566 9782	99,0488 1506	94,3732 0780	90,0046 2877	85,9199 0238	128
129	110,1489 9894	104,7076 7225	99,6336 7475	94,8987 1423	90,4768 4716	86,3442 7389	129
130	110,8718 1939	105,3564 8397	100,2161 0764	95,4216 0619	90,9463 2692	86,7658 3499	130
131	111,5928 3730	106,0031 4016	100,7961 2379	95,9418 9671	91,4130 8393	87,1846 0430	131
132	112,3120 5716	106,6476 4800	101,3737 3323	96,4595 9872	91,8771 3399	87,6006 0029	132
133	113,0294 8345	107,2900 1462	101,9489 4596	96,9747 2509	92,3384 9278	88,0138 4135	133
134	113,7451 2065	107,9302 4713	102,5217 7191	97,4872 8865	92,7971 7592	88,4243 4571	134
135	114,4589 7321	108,5683 5262	103,0922 2099	97,9973 0214	93,2531 9893	88,8321 3150	135
136	115,1710 4560	109,2043 3816	103,6603 0306	98,5047 7825	93,7065 7722	89,2372 1673	136
137	115,8813 4224	109,8382 1079	104,2260 2794	99,0097 2960	94,1573 2616	89,6396 1926	137
138	116,5898 6758	110,4699 7754	104,7894 0542	99,5121 6876	94,6054 6097	90,0393 5688	138
139	117,2966 2601	111,0996 4538	105,3504 4523	100,0121 0821	95,0509 9682	90,4364 4724	139
140	118,0016 2196	111,7272 2131	105,9091 5708	100,5095 6041	95,4939 4878	90,8309 0785	140
141	118,7048 5981	112,3527 1227	106,4655 5061	101,0045 3772	95,9343 3185	91,2227 5614	141
142	119,4063 4395	112,9761 2519	107,0196 3547	101,4970 5246	96,3721 6091	91,6120 0941	142
143	120,1060 7875	113,5974 6696	107,5714 2121	101,9871 1688	96,8074 5078	91,9986 8485	143
144	120,8040 6858	114,2167 4448	108,1209 1739	102,4747 4316	97,2402 1619	92,3827 9952	144
145	121,5003 1778	114,8339 6460	108,6681 3350	102,9599 4344	97,6704 7177	92,7643 7038	145
146	122,1948 3071	115,4491 3415	109,2130 7900	103,4427 2979	98,0982 3208	93,1434 1429	146
147	122,8876 1168	116,0622 5995	109,7557 6332	103,9231 1422	98,5235 1160	93,5199 4797	147
148	123,5786 6502	116,6733 4879	110,2961 9584	104,4011 0868	98,9463 2470	93,8939 8805	148
149	124,2679 9503	117,2824 0743	110,8343 8590	104,8767 2506	99,3666 8570	94,2655 5104	149
150	124,9556 0601	117,8894 4262	111,3703 4280	105,3499 7518	99,7846 0882	94,6346 5335	150

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

n	$\frac{3}{4}\%$	1%	$1\frac{1}{4}\%$	$1\frac{1}{2}\%$	$1\frac{3}{4}\%$	2%	n
1	0,9925 5583	0.9900 9901	0,9876 5432	0,9852 2167	0.9828 0098	0,9803 9216	1
2	1,9777 2291	1,9703 9506	1,9631 1538	1,9558 8342	1,9486 9875	1,9415 6094	2
3	2,9555 5624	2,9409 8521	2,9265 3371	2,9122 0042	2,8979 8403	2,8838 8327	3
4	3,9261 1041	3,9019 6555	3,8780 5798	3,8543 8465	3,8309 4254	3,8077 2870	4
5	4,8894 3961	4,8534 3124	4,8178 3504	4,7826 4497	4,7478 5508	4,7134 5951	5
6	5,8455 9763	5.7954 7647	5,7460 0992	5,6971 8717	5,6489 9762	5.6014 3089	6
7	6,7946 3785	6,7281 9453	6,6627 2585	6,5982 1396	6,5346 4139	6,4719 9107	7
8	7,7366 1325	7,6516 7775	7,5681 2429	7,4859 2508	7,4050 5297	7,3254 8144	8
9	8,6715 7642	8,5660 1758	8,4623 4498	8,3605 1732	8,2604 9432	8,1622 3671	9
10	9,5995 7958	9,4713 0453	9,3455 2591	9,2221 8455	9,1012 2291	8,9825 8501	10
11	10,5206 7452	10,3676 2825	10,2178 0337	10,0711 1779	9,9274 9181	9,7868 4805	11
12	11,4349 1267	11,2550 7747	11,0793 1197	10,9075 0521	10,7395 4969	10,5753 4122	12
13	12,3423 4508	12,1337 4007	11,9301 8466	11,7315 3222	11,5376 4097	11,3483 7375	13
14	13,2430 2242	13,0037 0304	12,7705 5275	12,5433 8150	12,3220 0587	12,1062 4877	14
15	14,1369 9495	13,8650 5252	13,6005 4592	13,3432 3301	13,0928 8046	12,8492 6350	15
16	15,0243 1261	14,7178 7378	14,4202 9227	14,1312 6405	13,8504 9677	13,5777 0931	16
17	15,9050 2492	15,5622 5127	15,2299 1829	14,9076 4931	14,5950 8282	14,2918 7188	17
18	16,7791 8107	16,3982 6858	16,0295 4893	15,6725 6089	15,3268 6272	14,9920 3125	18
19	17,6468 2984	17,2260 0850	16,8193 0759	16,4261 6837	16,0460 5673	15,6784 6201	19
20	18,5080 1969	18,0455 5297	17,5993 1613	17,1686 3879	16,7528 8130	16,3514 3334	20
21	19,3627 9870	18,8569 8313	18,3696 9495	17,9001 3673	17,4475 4919	17,0112 0916	21
22	20,2112 1459	19,6603 7934	19,1305 6291	18,6208 2437	18,1302 6948	17,6580 4820	22
23	21,0533 1473	20,4558 2113	19,8820 3744	19,3308 6145	18,8012 4764	18,2922 0412	23
24	21,8891 4614	21,2433 8726	20,6242 3451	20,0304 0537	19,4606 8565	18,9139 2560	24
25	22,7187 5547	22,0231 5570	21,3572 6865	20,7196 1120	20,1087 8196	19,5234 5647	25
26	23,5421 8905	22,7952 0366	22,0812 5299	21,3986 3172	20,7457 3166	20,1210 3576	26
27	24,3594 9286	23,5596 0759	22,7962 9925	22,0676 1746	21,3717 2644	20,7068 9780	27
28	25,1707 1251	24,3164 4316	23,5025 1778	22,7267 1671	21,9869 5474	21,2812 7236	28
29	25,9758 9331	25,0657 8530	24,2000 1756	23,3760 7558	22,5916 0171	21,8443 8466	29
30	26,7750 8021	25,8077 0822	24,8889 0623	24,0158 3801	23,1858 4934	22,3964 5555	30
31	27,5683 1783	26,5422 8537	25,5692 9010	24,6461 4582	23,7698 7650	22,9377 0152	31
32	28,3556 5045	27,2695 8947	26,2412 7418	25,2671 3874	24,3438 5897	23,4683 3482	32
33	29,1371 2203	27,9896 9255	26,9049 6215	25,8789 5442	24,9079 6951	23,9885 6355	33
34	29,9127 7621	28,7026 6589	27,5604 5644	26,4817 2849	25,4623 7789	24,4985 9172	34
35	30,6826 5629	29,4085 8009	28,2078 5822	27,0755 9458	26,0072 5100	24,9986 1933	35
36	31,4468 0525	30,1075 0504	28,8472 6737	27,6606 8431	26,5427 5283	25,4888 4248	36
37	32,2052 6576	30,7995 0994	29,4787 8259	28,2371 2740	27,0690 4455	25,9694 5341	37
38	32,9580 8130	31,4846 6330	30,1025 0133	28,8050 5163	27,5862 8457	26,4406 4060	38
39	33,7052 9048	32,1630 3298	30,7185 1983	29,3645 8288	28,0946 2857	26,9025 8883	39
40	34,4469 3844	32,8346 8611	31,3269 3316	29,9158 4520	28,5942 2955	27,3554 7924	40
41	35,1830 6545	33,4996 8922	31,9278 3522	30,4589 6079	29,0852 3789	27,7994 8945	41
42	35,9137 1260	34,1581 0814	32,5213 1874	30,9940 5004	29,5678 0136	28,2347 9358	42
43	36,6389 2070	34,8100 0806	33,1074 7530	31,5212 3157	30,0420 6522	28,6615 6233	43
44	37,3587 3022	35,4554 5352	33,6863 9536	32,0406 2223	30,5081 7221	29,0799 6307	44
45	38,0731 8136	36,0945 0844	34,2581 6825	32,5523 3718	30,9662 6261	29,4901 5987	45
46	38,7823 1401	36,7272 3608	34,8228 8222	33,0564 8983	31,4164 7431	29,8923 1360	46
47	39,4861 6775	37,3536 9909	35,3806 2442	33,5531 9195	31,8589 4281	30,2865 8196	47
48	40,1847 8189	37,9739 5949	35,9314 8091	34,0425 5365	32,2938 0129	30,6731 1957	48
49	40,8781 9542	38,5880 7871	36,4755 3670	34,5246 8339	32,7211 8063	31,0520 7801	49
50	41,5664 4707	39,1961 1753	37,0128 7575	34,9996 8807	33,1412 0946	31,4236 0589	50

TABLA XIII. Valor presente de una anualidad de 1 por período

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

n	$\frac{3}{4}\%$	1%	$1\frac{1}{4}\%$	$1\frac{1}{2}\%$	$1\frac{3}{4}\%$	2%	n
51	42,2495 7525	39,7981 3617	37,5435 8099	35,4676 7298	33,5540 1421	31,7878 4892	51
52	42,9276 1812	40,3941 9423	38,0677 3431	35,9287 4185	33,9597 1913	32,1449 4992	52
53	43,6006 1351	40,9843 5072	38,5854 1660	36,3829 9690	34,3584 4632	32,4950 4894	53
54	44,2685 9902	41,5686 6408	39,0967 0776	36,8305 3882	34,7503 1579	32,8382 8327	54
55	44,9316 1193	42,1471 9216	39,6016 8667	37,2714 6681	35,1354 4550	33,1747 8752	55
56	45,5896 8926	42,7199 9224	40,1004 3128	37,7058 7863	35,5139 5135	33,5046 9365	56
57	46,2428 6776	43,2871 2102	40,5930 1855	38,1338 7058	35,8859 4727	33,8281 3103	57
58	46,8911 8388	43,8486 3468	41,0795 2449	38,5555 3751	36,2515 4523	34,1452 2650	58
59	47,5346 7382	44,4045 8879	41,5600 2419	38,9709 7292	36,6108 5526	34,4561 0441	59
60	48,1733 7352	44,9550 3841	42,0345 9179	39,3802 6889	36,9639 8552	34,7608 8668	60
61	48,8073 1863	45,5000 3803	42,5033 0054	39,7835 1614	37,3110 4228	35,0596 9282	61
62	49,4365 4455	46,0396 4161	42,9662 2275	40,1808 0408	37,6521 3000	35,3526 4002	62
63	50,0610 8640	46,5739 0258	43,4234 2988	40,5722 2077	37,9873 5135	35,6398 4316	63
64	50,6809 7906	47,1028 7385	43,8749 9247	40,9578 5298	38,3168 0723	35,9214 1486	64
65	51,2962 5713	47,6266 0777	44,3209 8022	41,3377 8618	38,6405 9678	36,1974 6555	65
66	51,9069 5497	48,1451 5621	44,7614 6195	41,7121 0461	38,9588 1748	36,4681 0348	66
67	52,5131 0667	48,6585 7050	45,1965 0563	42,0808 9125	39,2715 6509	36,7334 3478	67
68	53,1147 4607	49,1669 0149	45,6261 7840	42,4442 2783	39,5789 3375	36,9935 6351	68
69	53,7119 0677	49,6701 9949	46,0505 4656	42,8021 9490	39,8810 1597	37,2485 9168	69
70	54,3046 2210	50,1685 1435	46,4696 7562	43,1548 7183	40,1779 0267	37,4986 1929	70
71	54,8929 2516	50,6618 9539	46,8836 3024	43,5023 3678	40,4696 8321	37,7437 4441	71
72	55,4768 4880	51,1503 9148	47,2924 7431	43,8446 6677	40,7564 4542	37,9840 6314	72
73	56,0564 2561	51,6340 5097	47,6962 7093	44,1819 3771	41,0382 7560	38,2196 6975	73
74	56,6316 8795	52,1129 2175	48,0950 8240	44,5142 2434	41,3152 5857	38,4506 5662	74
75	57,2026 6794	52,5870 5124	48,4889 7027	44,8416 0034	41,5874 7771	38,6771 1433	75
76	57,7693 9746	53,0564 8638	48,8779 9533	45,1641 3826	41,8550 1495	38,8991 3170	76
77	58,3319 0815	53,5212 7364	49,2622 1761	45,4819 0962	42,1179 5081	39,1167 9578	77
78	58,8902 3141	53,9814 5905	49,6416 9640	45,7949 8485	42,3763 6443	39,3301 9194	78
79	59,4443 9842	54,4370 8817	50,0164 9027	46,1034 3335	42,6303 3359	39,5394 0386	79
80	59,9944 4012	54,8882 0611	50,3866 5706	46,4073 2349	42,8799 3474	39,7445 1359	80
81	60,5403 8722	55,3348 5753	50,7522 5389	46,7067 2265	43,1252 4298	39,9456 0156	81
82	61,0822 7019	55,7770 8666	51,1133 3717	47,0016 9720	43,3663 3217	40,1427 4663	82
83	61,6201 1930	56,2149 3729	51,4699 6264	47,2923 1251	43,6032 7486	40,3360 2611	83
84	62,1539 6456	56,6484 5276	51,8221 8532	47,5786 3301	43,8361 4237	40,5255 1579	84
85	62,6838 3579	57,0776 7600	52,1700 5958	47,8607 2218	44,0650 0479	40,7112 8999	85
86	63,2097 6257	57,5026 4951	52,5136 3909	48,1386 4254	44,2899 3099	40,8934 2156	86
87	63,7317 7427	57,9234 1535	52,8529 7688	48,4124 5571	44,5109 8869	41,0719 8192	87
88	64,2499 0002	58,3400 1520	53,1881 2531	48,6822 2237	44,7282 4441	41,2470 4110	88
89	64,7641 6875	58,7524 9030	53,5191 3611	48,9480 0234	44,9417 6355	41,4186 6774	89
90	65,2746 0918	59,1608 8148	53,8460 6035	49,2098 5452	45,1516 1037	41,5869 2916	90
91	65,7812 4981	59,5652 2919	54,1689 4850	49,4678 3696	45,3578 4803	41,7518 9133	91
92	66,2841 1892	59,9655 7346	54,4878 5037	49,7220 0686	45,5605 3860	41,9136 1895	92
93	66,7832 4458	60,3619 5392	54,8028 1518	49,9724 2055	45,7597 4310	42,0721 7545	93
94	67,2786 5467	60,7544 0982	55,1138 9154	50,2191 3355	45,9555 2147	42,2276 2299	94
95	67,7703 7685	61,1429 8002	55,4211 2744	50,4622 0054	46,1479 3265	42,3800 2254	95
96	68,2584 3856	61,5277 0299	55,7245 7031	50,7016 7541	46,3370 3455	42,5294 3386	96
97	68,7428 6705	61,9086 1682	56,0242 6698	50,9376 1124	46,5228 8408	42,6759 1555	97
98	69,2236 8938	62,2857 5923	56,3202 6368	51,1700 6034	46,7055 3718	42,8195 2505	98
99	69,7009 3239	62,6591 6755	56,6126 0610	51,3990 7422	46,8850 4882	42,9603 1867	99
100	70,1746 2272	63,0288 7877	56,9013 3936	51,6247 0367	47,0614 7304	43,0983 5164	100

TABLA XIII. Valor presente de una anualidad de 1 por período

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

n	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%	n
1	0,9756 0976	0,9708 7379	0,9661 8357	0,9615 3846	0,9569 3780	0,9523 8095	1
2	1,9274 2415	1,9134 6970	1,8996 9428	1,8860 9467	1,8726 6775	1,8594 1043	2
3	2,8560 2356	2,8286 1135	2,8016 3698	2,7750 9103	2,7489 6435	2,7232 4803	3
4	3,7619 7421	3,7170 9840	3,6730 7921	3,6298 9522	3,5875 2570	3,5459 5050	4
5	4,6458 2850	4,5797 0719	4,5150 5238	4,4518 2233	4,3899 7674	4,3294 7667	5
6	5,5081 2536	5,4171 9144	5,3285 5302	5,2421 3686	5,1578 7248	5,0756 9207	6
7	6,3493 9060	6,2302 8296	6,1145 4398	6,0020 5467	5,8927 0094	5,7863 7340	7
8	7,1701 3717	7,0196 9219	6,8739 5554	6,7327 4487	6,5958 8607	6,4632 1276	8
9	7,9708 6553	7,7861 0892	7,6076 8651	7,4353 3161	7,2687 9050	7,1078 2168	9
10	8,7520 6393	8,5302 0284	8,3166 0532	8,1108 9578	7,9127 1818	7,7217 3493	10
11	9,5142 0871	9,2526 2411	9,0015 5104	8,7604 7671	8,5289 1692	8,3064 1422	11
12	10,2577 6460	9,9540 0399	9,6633 3433	9,3850 7376	9,1185 8078	8,8632 5164	12
13	10,9831 8497	10,6349 5533	10,3027 3849	9,9856 4785	9,6828 5242	9,3935 7299	13
14	11,6909 1217	11,2960 7314	10,9205 2028	10,5631 2293	10,2228 2528	9,8986 4094	14
15	12,3813 7773	11,9379 3509	11,5174 1090	11,1183 8743	10,7395 4573	10,3796 5804	15
16	13,0550 0266	12,5611 0203	12,0941 1681	11,6522 9561	11,2340 1505	10,8377 6956	16
17	13,7121 9772	13,1661 1847	12,6513 2059	12,1656 6885	11,7071 9143	11,2740 6625	17
18	14,3533 6363	13,7535 1308	13,1896 8173	12,6592 9697	12,1599 9180	11,6895 8690	18
19	14,9788 9134	14,3237 9911	13,7098 3742	13,1339 3940	12,5932 9359	12,0853 2086	19
20	15,5891 6229	14,8774 7486	14,2124 0330	13,5903 2634	13,0079 3645	12,4622 1034	20
21	16,1845 4857	15,4150 2414	14,6979 7420	14,0291 5995	13,4047 2388	12,8211 5271	21
22	16,7654 1324	15,9369 1664	15,1671 2484	14,4511 1533	13,7844 2476	13,1630 0258	22
23	17,3321 1048	16,4436 0839	15,6204 1047	14,8568 4167	14,1477 7489	13,4885 7388	23
24	17,8849 8583	16,9355 4212	16,0583 6760	15,2469 6314	14,4954 7837	13,7986 4179	24
25	18,4243 7642	17,4131 4769	16,4815 1459	15,6220 7994	14,8282 0896	14,0939 4457	25
26	18,9506 1114	17,8768 4242	16,8903 5226	15,9827 6918	15,1466 1145	14,3751 8530	26
27	19,4640 1087	18,3270 3147	17,2853 6451	16,3295 8575	15,4513 0282	14,6430 3362	27
28	19,9648 8866	18,7641 0823	17,6670 1885	16,6630 6323	15,7428 7351	14,8981 2726	28
29	20,4535 4991	19,1884 5459	18,0357 6700	16,9837 1463	16,0218 8853	15,1410 7358	29
30	20,9302 9259	19,6004 4135	18,3920 4541	17,2920 3330	16,2888 8854	15,3724 5103	30
31	21,3954 0741	20,0004 2849	18,7362 7576	17,5884 9356	16,5443 9095	15,5928 1050	31
32	21,8491 7796	20,3887 6553	19,0688 6547	17,8735 5150	16,7888 9086	15,8026 7667	32
33	22,2918 8094	20,7657 9178	19,3902 0818	18,1476 4567	17,0228 6207	16,0025 4921	33
34	22,7237 8628	21,1318 3668	19,7006 8423	18,4111 9776	17,2467 5796	16,1929 0401	34
35	23,1451 5734	21,4872 2007	20,0006 6110	18,6646 1323	17,4610 1240	16,3741 9429	35
36	23,5562 5107	21,8322 5250	20,2904 9381	18,9082 8195	17,6660 4058	16,5468 5171	36
37	23,9573 1812	22,1672 3544	20,5705 2542	19,1425 7880	17,8622 3979	16,7112 8734	37
38	24,3486 0304	22,4924 6159	20,8410 8736	19,3678 6423	18,0499 9023	16,8678 9271	38
39	24,7303 4443	22,8082 1513	21,1024 9987	19,5844 8484	18,2296 5572	17,0170 4067	39
40	25,1027 7505	23,1147 7197	21,3550 7234	19,7927 7388	18,4015 8442	17,1590 8635	40
41	25,4661 2200	23,4123 9997	21,5991 0371	19,9930 5181	18,5661 0949	17,2943 6796	41
42	25,8206 0683	23,7013 5920	21,8348 8281	20,1856 2674	18,7235 4975	17,4232 0758	42
43	26,1664 4569	23,9819 0213	22,0626 8870	20,3707 9494	18,8742 1029	17,5459 1198	43
44	26,5038 4945	24,2542 7392	22,2827 9102	20,5488 4129	19,0183 8305	17,6627 7331	44
45	26,8330 2386	24,5187 1254	22,4954 5026	20,7200 3970	19,1563 4742	17,7740 6982	45
46	27,1541 6962	24,7754 4907	22,7009 1813	20,8846 5356	19,2883 7074	17,8800 6650	46
47	27,4674 8255	25,0247 0783	22,8994 3780	21,0429 3612	19,4147 0884	17,9810 1571	47
48	27,7731 5371	25,2667 0664	23,0912 4425	21,1951 3088	19,5356 0654	18,0771 5782	48
49	28,0713 6947	25,5016 5693	23,2765 6450	21,3414 7200	19,6512 9813	18,1687 2173	49
50	28,3623 1168	25,7297 6401	23,4556 1787	21,4821 8462	19,7620 0778	18,2559 2546	50

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

n	2½%	3%	3½%	4%	4½%	5%	n
51	28.6461 5774	25.9512 2719	23.6286 1630	21.6174 8521	19.8679 5003	18.3389 7663	51
52	28.9230 8072	26.1662 3999	23.7957 6454	21.7475 8193	19.9693 3017	18.4180 7298	52
53	29.1932 4948	26.3749 9028	23.9572 6043	21.8726 7493	20.0663 4466	18.4934 0284	53
54	29.4568 2876	26.5776 6047	24.1132 9510	21.9929 5667	20.1591 8149	18.5651 4556	54
55	29.7139 7928	26.7744 2764	24.2640 5323	22.1086 1218	20.2480 2057	18.6334 7196	55
56	29.9648 5784	26.9654 6373	24.4097 1327	22.2189 1940	20.3330 3404	18.6985 4473	56
57	30.2096 1740	27.1509 3566	24.5504 4760	22.3267 4943	20.4143 8664	18.7605 1879	57
58	30.4484 0722	27.3310 0549	24.6864 2281	22.4295 6676	20.4922 3602	18.8195 4170	58
59	30.6813 7290	27.5058 3058	24.8177 9981	22.5284 2957	20.5667 3303	18.8757 5400	59
60	30.9086 5649	27.6755 6367	24.9447 3412	22.6234 8997	20.6380 2204	18.9292 8953	60
61	31.1303 9657	27.8403 5307	25.0673 7596	22.7148 9421	20.7062 4118	18.9802 7574	61
62	31.3467 2836	28.0003 4279	25.1858 7049	22.8027 8289	20.7715 2266	19.0288 3404	62
63	31.5577 8377	28.1556 7261	25.3003 5796	22.8872 9124	20.8339 9298	19.0750 8003	63
64	31.7636 9148	28.3064 7826	25.4109 7388	22.9685 4927	20.8937 7319	19.1191 2384	64
65	31.9645 7705	28.4528 9152	25.5178 4916	23.0466 8199	20.9509 7913	19.1610 7033	65
66	32.1605 6298	28.5950 4031	25.6211 1030	23.1218 0961	21.0057 2165	19.2010 1936	66
67	32.3517 6876	28.7330 4884	25.7208 7951	23.1940 4770	21.0581 0684	19.2390 6606	67
68	32.5383 1099	28.8670 3771	25.8172 7489	23.2635 0740	21.1082 3621	19.2753 0101	68
69	32.7203 0340	28.9971 2399	25.9104 1052	23.3302 9558	21.1562 0690	19.3098 1048	69
70	32.8978 5698	29.1234 2135	26.0003 9664	23.3945 1498	21.2021 1187	19.3426 7665	70
71	33.0710 7998	29.2460 4015	26.0873 3975	23.4562 6440	21.2460 4007	19.3739 7776	71
72	33.2400 7803	29.3650 8752	26.1713 4275	23.5156 3885	21.2880 7662	19.4037 8834	72
73	33.4049 5417	29.4806 6750	26.2525 0508	23.5727 2966	21.3283 0298	19.4321 7937	73
74	33.5658 0895	29.5928 8107	26.3309 2278	23.6276 2468	21.3667 9711	19.4592 1845	74
75	33.7227 4044	29.7018 2628	26.4066 8868	23.6804 0834	21.4036 3360	19.4849 6995	75
76	33.8758 4433	29.8075 9833	26.4798 9244	23.7311 6187	21.4388 8383	19.5094 9519	76
77	34.0252 1398	29.9102 8964	26.5506 2072	23.7799 6333	21.4726 1611	19.5328 5257	77
78	34.1709 4047	30.0099 8994	26.6189 5721	23.8268 8782	21.5048 9579	19.5550 9768	78
79	34.3131 1265	30.1067 8635	26.6849 8281	23.8720 0752	21.5357 8545	19.5762 8351	79
80	34.4518 1722	30.2007 6345	26.7487 7567	23.9153 9185	21.5653 4493	19.5964 6048	80
81	34.5871 3875	30.2920 0335	26.8104 1127	23.9571 0754	21.5936 3151	19.6156 7665	81
82	34.7191 5976	30.3805 8577	26.8699 6258	23.9972 1879	21.6207 0001	19.6339 7776	82
83	34.8479 6074	30.4665 8813	26.9275 0008	24.0357 8730	21.6466 0288	19.6514 0739	83
84	34.9736 2023	30.5500 8556	26.9830 9186	24.0728 7240	21.6713 9032	19.6680 0704	84
85	35.0962 1486	30.6311 5103	27.0368 0373	24.1085 3116	21.6951 1035	19.6838 1623	85
86	35.2158 1938	30.7098 5537	27.0886 9926	24.1428 1842	21.7178 0895	19.6988 7260	86
87	35.3325 0671	30.7862 6735	27.1388 3986	24.1757 8694	21.7395 3009	19.7132 1200	87
88	35.4463 4801	30.8604 5374	27.1872 8489	24.2074 8745	21.7603 1588	19.7268 6857	88
89	35.5574 1269	30.9324 7936	27.2340 9168	24.2379 6870	21.7802 0658	19.7398 7483	89
90	35.6657 6848	31.0024 0714	27.2793 1564	24.2672 7759	21.7992 4075	19.7522 6174	90
91	35.7714 8144	31.0702 9820	27.3230 1028	24.2954 5923	21.8174 5526	19.7640 5880	91
92	35.8746 1604	31.1362 1184	27.3652 2732	24.3225 5695	21.8348 8542	19.7752 9410	92
93	35.9752 3516	31.2002 0567	27.4060 1673	24.3486 1245	21.8515 6499	19.7859 9438	93
94	36.0734 0016	31.2623 3560	27.4454 2680	24.3736 6582	21.8675 2631	19.7961 8512	94
95	36.1691 7089	31.3226 5592	27.4835 0415	24.3977 5559	21.8828 0030	19.8058 9059	95
96	36.2626 0574	31.3812 1934	27.5202 9387	24.4209 1884	21.8974 1655	19.8151 3390	96
97	36.3537 6170	31.4380 7703	27.5558 3948	24.4431 9119	21.9114 0340	19.8239 3705	97
98	36.4426 9434	31.4932 7867	27.5901 8308	24.4646 0692	21.9247 8794	19.8323 2100	98
99	36.5294 5790	31.5468 7250	27.6233 6529	24.4851 9896	21.9375 9612	19.8403 0571	99
100	36.6141 0526	31.5989 0534	27.6554 2540	24.5049 9900	21.9498 5274	19.8479 1020	100

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

n	5½%	6%	6½%	7%	7½%	8%	n
1	0,9478 6730	0.9433 9623	0,9389 6714	0,9345 7944	0,9302 3256	0,9259 2593	1
2	1,8463 1971	1.8333 9267	1,8206 2642	1,8080 1817	1,7955 6517	1,7832 6475	2
3	2,6979 3338	2,6730 1195	2,6484 7551	2,6243 1604	2,6005 2574	2,5770 9699	3
4	3,5051 5012	3,4651 0561	3,4257 9860	3,3872 1126	3,3493 2627	3,3121 2684	4
5	4,2702 8448	4,2123 6379	4,1556 7944	4,1001 9744	4,0458 8490	3,9927 1004	5
6	4,9955 3031	4,9173 2433	4,8410 1356	4,7665 3966	4,6938 4642	4,6228 7966	6
7	5,6829 6712	5,5823 8144	5,4845 1977	5,3892 8940	5,2966 0132	5,2063 7006	7
8	6,3345 6599	6,2097 9381	6,0887 5096	5,9712 9851	5,8573 0355	5,7466 3894	8
9	6,9521 9525	6,8016 9227	6,6561 0419	6,5152 3225	6,3788 8703	6,2468 8791	9
10	7,5376 2583	7,3600 8705	7,1888 3022	7,0235 8154	6,8640 8096	6,7100 8140	10
11	8,0925 3633	7.8868 7458	7,6890 4246	7,4986 7434	7,3154 2415	7,1389 6426	11
12	8,6185 1785	8,3838 4394	8,1587 2532	7,9426 8630	7,7352 7827	7,5360 7802	12
13	9,1170 7853	8,8526 8296	8,5997 4208	8,3576 5074	8,1258 4026	7,9037 7594	13
14	9,5896 4790	9,2949 8393	9,0138 4233	8,7454 6799	8,4891 5373	8,2442 3698	14
15	10,0375 8094	9,7122 4899	9,4026 6885	9,1079 1401	8,8271 1974	8,5594 7869	15
16	10,4621 6203	10,1058 9527	9,7677 6418	9,4466 4860	9,1415 0674	8,8513 6916	16
17	10,8646 0856	10,4772 5969	10,1105 7670	9,7632 2299	9,4339 5976	9,1216 3811	17
18	11,2460 7447	10,8276 0348	10,4324 6638	10,0590 8691	9,7060 0908	9,3718 8714	18
19	11,6076 5352	11,1581 1649	10,7347 1022	10,3355 9524	9,9590 7821	9,6035 9920	19
20	11,9503 8248	11,4699 2122	11,0185 0725	10,5940 1425	10,1944 9136	9,8181 4741	20
21	12,2752 4406	11,7640 7662	11,2849 8333	10,8355 2733	10,4134 8033	10,0168 0316	21
22	12,5831 6973	12,0415 8172	11,5351 9562	11,0612 4050	10,6171 9101	10,2007 4366	22
23	12,8750 4239	12,3033 7898	11,7701 3673	11,2721 8738	10,8066 8931	10,3710 5895	23
24	13,1516 9895	12,5503 5753	11,9907 3871	11,4693 3400	10,9829 6680	10,5287 5828	24
25	13,4139 3266	12,7833 5616	12,1978 7673	11,6535 8318	11,1469 4586	10,6747 7619	25
26	13,6624 9541	13,0031 6619	12,3923 7251	11,8257 7867	11,2994 8452	10,8099 7795	26
27	13,8980 9991	13,2105 3414	12,5749 9766	11,9867 0904	11,4413 8095	10,9351 6477	27
28	14,1214 2172	13,4061 6428	12,7464 7668	12,1371 1125	11,5733 7763	11,0510 7849	28
29	14,3331 0116	13,5907 2102	12,9074 8984	12,2776 7407	11,6961 6524	11,1584 0601	29
30	14,5337 4517	13,7648 3115	13,0586 7591	12,4090 4118	11,8103 8627	11,2577 8334	30
31	14,7239 2907	13,9290 8599	13,2006 3465	12,5318 1419	11,9166 3839	11,3497 9939	31
32	14,9041 9817	14,0840 4339	13,3339 2925	12,6465 5532	12,0154 7757	11,4349 9944	32
33	15,0750 6936	14,2302 2961	13,4590 8850	12,7537 9002	12,1074 2099	11,5138 8837	33
34	15,2370 3257	14,3681 4114	13,5766 0892	12,8540 0936	12,1929 4976	11,5869 3367	34
35	15,3905 5220	14,4982 4636	13,6869 5673	12,9476 7230	12,2725 1141	11,6545 6822	35
36	15,5360 6843	14,6209 8713	13,7905 6970	13,0352 0776	12,3465 2224	11,7171 9279	36
37	15,6739 9851	14,7367 8031	13,8878 5887	13,1170 1660	12,4153 6952	11,7751 7851	37
38	15,8047 3793	14,8460 1916	13,9792 1021	13,1934 7345	12,4794 1351	11,8288 6899	38
39	15,9286 6154	14,9490 7468	14,0649 8611	13,2649 2846	12,5389 8931	11,8785 8240	39
40	16,0461 2469	15,0462 9687	14,1455 2687	13,3317 0884	12,5944 0866	11,9246 1333	40
41	16,1574 6416	15,1380 1592	14,2211 5199	13,3941 2041	12,6459 6155	11,9672 3457	41
42	16,2629 9920	15,2245 4332	14,2921 6149	13,4524 4898	12,6939 1772	12,0066 9867	42
43	16,3630 3242	15,3061 7294	14,3588 3708	13,5069 6167	12,7385 2811	12,0432 3951	43
44	16,4578 5063	15,3831 8202	14,4214 4327	13,5579 0810	12,7800 2615	12,0770 7362	44
45	16,5477 2572	15,4558 3209	14,4802 2842	13,6055 2159	12,8186 2898	12,1084 0150	45
46	16,6329 1537	15,5243 6990	14,5354 2575	13,6500 2018	12,8545 3858	12,1374 0880	46
47	16,7136 6386	15,5890 2821	14,5872 5422	13,6916 0764	12,8879 4287	12,1642 6741	47
48	16,7902 0271	15,6500 2661	14,6359 1946	13,7304 7443	12,9190 1662	12,1891 3649	48
49	16,8627 5139	15,7075 7227	14,6816 1451	13,7667 9853	12,9479 2244	12,2121 6341	49
50	16,9315 1790	15,7618 6064	14,7245 2067	13,8007 4629	12,9748 1157	12,2334 8464	50

TABLA XIV. Pago periódico de una anualidad cuyo monto es 1

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} + i\right)$$

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
1	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1
2	0,4993 7578	0,4991 6805	0,4989 6050	0,4987 5312	0.4985 4591	0,4983 3887	2
3	0.3325 0139	0,3322 2469	0,3319 4829	0,3316 7221	0.3313 9643	0,3311 2095	3
4	0,2490 6445	0,2487 5347	0,2484 4291	0,2481 3279	0.2478 2310	0,2475 1384	4
5	0,1990 0250	0,1986 7110	0,1983 4026	0,1980 0997	0.1976 8024	0,1973 5105	5
6	0.1656 2803	0,1652 8317	0,1649 3898	0,1645 9546	0,1642 5260	0,1639 1042	6
7	0,1417 8928	0,1414 3491	0,1410 8133	0,1407 2854	0,1403 7653	0,1400 2531	7
8	0,1239 1035	0,1235 4895	0,1231 8845	0,1228 2886	0,1224 7018	0,1221 1240	8
9	0,1100 0462	0,1096 3785	0,1092 7209	0,1089 0736	0,1085 4365	0,1081 8096	9
10	0,0988 8015	0,0985 0915	0,0981 3929	0,0977 7057	0,0974 0299	0,0970 3654	10
11	0,0897 7840	0,0894 0402	0,0890 3090	0,0886 5903	0,0882 8842	0,0879 1905	11
12	0,0821 9370	0,0818 1657	0,0814 4082	0,0810 6643	0,0806 9341	0,0803 2176	12
13	0,0757 7595	0,0753 9656	0,0750 1866	0,0746 4224	0,0742 6730	0,0738 9385	13
14	0,0702 7510	0,0698 9383	0,0695 1416	0,0691 3609	0,0687 5962	0,0638 8474	14
15	0,0655 0777	0,0651 2491	0,0647 4378	0,0643 6436	0,0639 8666	0,0636 1067	15
16	0,0613 3642	0,0609 5223	0,0605 6988	0,0601 8937	0,0598 1068	0,0594 3382	16
17	0,0576 5587	0,0572 7056	0,0568 8720	0,0565 0579	0,0561 2632	0,0557 4880	17
18	0,0543 8433	0,0539 9807	0,0536 1387	0,0532 3173	0,0528 5165	0,0524 7363	18
19	0,0514 5722	0,0510 7015	0,0506 8525	0,0503 0253	0,0499 2198	0,0495 4361	19
20	0,0488 2288	0,0484 3511	0,0480 4963	0,0476 6645	0,0472 8556	0,0469 0696	20
21	0,0464 3947	0,0460 5111	0,0456 6517	0,0452 8163	0,0449 0050	0,0445 2176	21
22	0,0442 7278	0,0438 8393	0,0434 9760	0,0431 1380	0,0427 3251	0,0423 5374	22
23	0,0422 9455	0,0419 0528	0,0415 1865	0,0411 3465	0,0407 5329	0,0403 7456	23
24	0,0404 8121	0,0400 9159	0,0397 0472	0,0393 2061	0,0389 3925	0,0385 6062	24
25	0,0388 1298	0,0384 2307	0,0380 3603	0,0376 5186	0,0372 7055	0,0368 9210	25
26	0,0372 7312	0,0368 8297	0,0364 9581	0,0361 1163	0,0357 3043	0,0353 5220	26
27	0,0358 4736	0,0354 5702	0,0350 6978	0,0346 8565	0,0343 0460	0,0339 2664	27
28	0,0345 2347	0,0341 3299	0,0337 4572	0,0333 6167	0,0329 8082	0,0326 0317	28
29	0,0332 9093	0,0329 0033	0,0325 1307	0,0321 2914	0,0317 4853	0,0313 7123	29
30	0,0321 4059	0,0317 4992	0,0313 6270	0,0309 7892	0,0305 9857	0,0302 2166	30
31	0,0310 6449	0,0306 7378	0,0302 8663	0,0299 0304	0,0295 2299	0,0291 4649	31
32	0,0300 5569	0,0296 6496	0,0292 7791	0,0288 9453	0,0285 1482	0,0281 3875	32
33	0,0291 0806	0,0287 1734	0,0283 3041	0,0279 4727	0,0275 6791	0,0271 9231	33
34	0,0282 1620	0,0278 2551	0,0274 3873	0,0270 5586	0,0266 7687	0,0263 0176	34
35	0,0273 7533	0,0269 8470	0,0265 9809	0,0262 1550	0,0258 3691	0,0254 6231	35
36	0,0265 8121	0,0261 9065	0,0258 0423	0,0254 2194	0,0250 4376	0,0246 6970	36
37	0,0258 3004	0,0254 3957	0,0250 5336	0,0246 7139	0,0242 9365	0,0239 2013	37
38	0,0251 1843	0,0247 2808	0,0243 4208	0,0239 6045	0,0235 8316	0,0232 1020	38
39	0,0244 4335	0,0240 5311	0,0236 6736	0,0232 8607	0,0229 0925	0,0225 3687	39
40	0,0238 0204	0,0234 1194	0,0230 2644	0,0226 4552	0,0222 6917	0,0218 9739	40
41	0,0231 9204	0,0228 0209	0,0224 1685	0,0220 3631	0,0216 6046	0,0212 8928	41
42	0,0226 1112	0,0222 2133	0,0218 3637	0,0214 5622	0,0210 8087	0,0207 1031	42
43	0,0220 5724	0,0216 6762	0,0212 8295	0,0209 0320	0,0205 2836	0,0201 5843	43
44	0,0215 2855	0,0211 3912	0,0207 5474	0,0203 7541	0,0200 0110	0,0196 3180	44
45	0,0210 2339	0,0206 3415	0.0202 5008	0,0198 7117	0,0194 9740	0,0191 2875	45
46	0,0205 4022	0,0201 5118	0,0197 6743	0,0193 8894	0,0190 1571	0,0186 4772	46
47	0,0200 7762	0,0196 8880	0,0193 0537	0,0189 2733	0,0185 5465	0,0181 8732	47
48	0,0196 3433	0,0192 4572	0,0188 6263	0,0184 8503	0,0181 1291	0,0177 4626	48
49	0,0192 0915	0,0188 2077	0,0184 3801	0,0180 6087	0,0176 8932	0,0173 2334	49
50	0,0188 0099	0,0184 1285	0,0180 3044	0,0176 5376	0,0172 8278	0,0169 1749	50

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} + i\right)$$

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
51	0,0184 0886	0,0180 2096	0,0176 3891	0,0172 6269	0,0168 9230	0,0165 2770	51
52	0,0180 3184	0,0176 4418	0,0172 6249	0,0168 8675	0,0165 1694	0,0161 5304	52
53	0,0176 6906	0,0172 8165	0,0169 0033	0,0165 2507	0,0161 5585	0,0157 9266	53
54	0,0173 1974	0,0169 3259	0,0165 5164	0,0161 7686	0,0158 0824	0,0154 4576	54
55	0,0169 8314	0,0165 9625	0,0162 1567	0,0158 4139	0,0154 7337	0,0151 1160	55
56	0,0166 5858	0,0162 7196	0,0158 9176	0,0155 1797	0,0151 5056	0,0147 8951	56
57	0,0163 4542	0,0159 5907	0,0155 7927	0,0152 0598	0,0148 3918	0,0144 7885	57
58	0,0160 4308	0,0156 5701	0,0152 7760	0,0149 0481	0,0145 3863	0,0141 7903	58
59	0,0157 5101	0,0153 6522	0,0149 8620	0,0146 1392	0,0142 4836	0,0138 8949	59
60	0,0154 6869	0,0150 8319	0,0147 0457	0,0143 3280	0,0139 6787	0,0136 0973	60
61	0,0151 9564	0,0148 1043	0,0144 3221	0,0140 6096	0,0136 9666	0,0133 3926	61
62	0,0149 3142	0,0145 4650	0,0141 6869	0,0137 9796	0,0134 3428	0,0130 7763	62
63	0,0146 7561	0,0142 9098	0,0139 1358	0,0135 4337	0,0131 8033	0,0128 2442	63
64	0,0144 2780	0,0140 4348	0,0136 6649	0,0132 9681	0,0129 3440	0,0125 7923	64
65	0,0141 8764	0,0138 0361	0,0134 2704	0,0130 5789	0,0126 9612	0,0123 4171	65
66	0,0139 5476	0,0135 7105	0,0131 9489	0,0128 2627	0,0124 6515	0,0121 1149	66
67	0,0137 2886	0,0133 4545	0,0129 6972	0,0126 0163	0,0122 4116	0,0118 8825	67
68	0,0135 0961	0,0131 2652	0,0127 5121	0,0123 8366	0,0120 2383	0,0116 7168	68
69	0,0132 9674	0,0129 1395	0,0125 3908	0,0121 7206	0,0118 1289	0,0114 6150	69
70	0,0130 8996	0,0127 0749	0,0123 3304	0,0119 6657	0,0116 0805	0,0112 5742	70
71	0,0128 8902	0,0125 0687	0,0121 3285	0,0117 6693	0,0114 0906	0,0110 5919	71
72	0,0126 9368	0,0123 1185	0,0119 3827	0,0115 7289	0,0112 1567	0,0108 6657	72
73	0,0125 0370	0,0121 2220	0,0117 4905	0,0113 8422	0,0110 2766	0,0106 7933	73
74	0,0123 1887	0,0119 3769	0,0115 6498	0,0112 0070	0,0108 4481	0,0104 9725	74
75	0,0121 3898	0,0117 5813	0,0113 8586	0,0110 2214	0,0106 6690	0,0103 2011	75
76	0,0119 6385	0,0115 8332	0,0112 1150	0,0108 4832	0,0104 9375	0,0101 4773	76
77	0,0117 9327	0,0114 1308	0,0110 4170	0,0106 7908	0,0103 2517	0,0099 7993	77
78	0,0116 2708	0,0112 4722	0,0108 7629	0,0105 1423	0,0101 6099	0,0098 1652	78
79	0,0114 6511	0,0110 8559	0,0107 1510	0,0103 5360	0,0100 0103	0,0096 5733	79
80	0,0113 0721	0,0109 2802	0,0105 5798	0,0101 9704	0,0098 4514	0,0095 0222	80
81	0,0111 5321	0,0107 7436	0,0104 0477	0,0100 4439	0,0096 9316	0,0093 5102	81
82	0,0110 0298	0,0106 2447	0,0102 5534	0,0098 9552	0,0095 4496	0,0092 0360	82
83	0,0108 5639	0,0104 7822	0,0101 0954	0,0097 5028	0,0094 0040	0,0090 5982	83
84	0,0107 1330	0,0103 3547	0,0099 6724	0,0096 0855	0,0092 5935	0,0089 1955	84
85	0,0105 7359	0,0101 9610	0,0098 2833	0,0094 7021	0,0091 2168	0,0087 8266	85
86	0,0104 3714	0,0100 6000	0,0096 9268	0,0093 3513	0,0089 8727	0,0086 4904	86
87	0,0103 0384	0,0099 2704	0,0095 6018	0,0092 0320	0,0088 5602	0,0085 1857	87
88	0,0101 7357	0,0097 9713	0,0094 3073	0,0090 7431	0,0087 2781	0,0083 9115	88
89	0,0100 4625	0,0096 7015	0,0093 0422	0,0089 4837	0,0086 0255	0,0082 6667	89
90	0,0099 2177	0,0095 4602	0,0091 8055	0,0088 2527	0,0084 8013	0,0081 4504	90
91	0,0098 0004	0,0094 2464	0,0090 5962	0,0087 0493	0,0083 6047	0,0080 2616	91
92	0,0096 8096	0,0093 0592	0,0089 4136	0,0085 8724	0,0082 4346	0,0079 0994	92
93	0,0095 6446	0,0091 8976	0,0088 2568	0,0084 7213	0,0081 2903	0,0077 9629	93
94	0,0094 5044	0,0090 7610	0,0087 1248	0,0083 5950	0,0080 1709	0,0076 8514	94
95	0,0093 3884	0,0089 6485	0,0086 0170	0,0082 4930	0,0079 0757	0,0075 7641	95
96	0,0092 2957	0,0088 5594	0,0084 9325	0,0081 4143	0,0078 0038	0,0074 7001	96
97	0,0091 2257	0,0087 4929	0,0083 8707	0,0080 3583	0,0076 9547	0,0073 6588	97
98	0,0090 1776	0,0086 4484	0,0082 8309	0,0079 3242	0,0075 9275	0,0072 6394	98
99	0,0089 1508	0,0085 4252	0,0081 8124	0,0078 3115	0,0074 9216	0,0071 6415	99
100	0,0088 1446	0,0084 4226	0,0080 8145	0,0077 3194	0,0073 9363	0,0070 6642	100

TABLA XIV. Pago periódico de una anualidad cuyo monto es 1

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} + i\right)$$

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
01	0,0087 1584	0,0083 4400	0,0079 8366	0,0076 3473	0,0072 9711	0,0069 7069	101
02	0,0086 1917	0,0082 4769	0,0078 8782	0,0075 3947	0,0072 0254	0,0068 7690	102
03	0,0085 2439	0,0081 5327	0,0077 9387	0,0074 4610	0,0071 0986	0,0067 8501	103
04	0,0084 3144	0,0080 6068	0,0077 0175	0,0073 5457	0,0070 1901	0,0066 9495	104
05	0,0083 4027	0,0079 6987	0,0076 1142	0,0072 6481	0,0069 2994	0,0066 0668	105
06	0,0082 5082	0,0078 8079	0,0075 2281	0,0071 7679	0,0068 4261	0,0065 2013	106
07	0,0081 6307	0,0077 9340	0,0074 3589	0,0070 9045	0,0067 5696	0,0064 3527	107
08	0,0080 7694	0,0077 0764	0,0073 5061	0,0070 0575	0,0066 7294	0,0063 5205	108
09	0,0079 9241	0,0076 2347	0,0072 6691	0,0069 2264	0,0065 9052	0,0062 7042	109
10	0,0079 0942	0,0075 4084	0,0071 8476	0,0068 4107	0,0065 0965	0,0061 9033	110
11	0,0078 2793	0,0074 5972	0,0071 0412	0,0067 6102	0,0064 3028	0,0061 1175	111
12	0,0077 4791	0,0073 8007	0,0070 2495	0,0066 8242	0,0063 5237	0,0060 3464	112
13	0,0076 6932	0,0073 0184	0,0069 4720	0,0066 0526	0,0062 7590	0,0059 5895	113
14	0,0075 9211	0,0072 2500	0,0068 7083	0,0065 2948	0,0062 0081	0,0058 8465	114
15	0,0075 1626	0,0071 4952	0,0067 9582	0,0064 5506	0,0061 2708	0,0058 1171	115
16	0,0074 4172	0,0070 7535	0,0067 2213	0,0063 8195	0,0060 5466	0,0057 4008	116
17	0,0073 6846	0,0070 0246	0,0066 4973	0,0063 1013	0,0059 8353	0,0056 6974	117
18	0,0072 9646	0,0069 3082	0,0065 7857	0,0062 3956	0,0059 1365	0,0056 0065	118
19	0,0072 2567	0,0068 6041	0,0065 0863	0,0061 7021	0,0058 4499	0,0055 3278	119
20	0,0071 5607	0,0067 9118	0,0064 3988	0,0061 0205	0,0057 7751	0,0054 6609	120
21	0,0070 8764	0,0067 2311	0,0063 7230	0,0060 3505	0,0057 1120	0,0054 0057	121
22	0,0070 2033	0,0066 5617	0,0063 0584	0,0059 6918	0,0056 4602	0,0053 3618	122
23	0,0069 5412	0,0065 9034	0,0062 4049	0,0059 0441	0,0055 8194	0,0052 7289	123
24	0,0068 8899	0,0065 2558	0,0061 7621	0,0058 4072	0,0055 1894	0,0052 1067	124
25	0,0068 2491	0,0064 6188	0,0061 1298	0,0057 7808	0,0054 5700	0,0051 4951	125
26	0,0067 6186	0,0063 9919	0,0060 5078	0,0057 1647	0,0053 9607	0,0050 8937	126
27	0,0066 9981	0,0063 3751	0,0059 8959	0,0056 5586	0,0053 3615	0,0050 3024	127
28	0,0066 3873	0,0062 7681	0,0059 2937	0,0055 9623	0,0052 7721	0,0049 7208	128
29	0,0065 7861	0,0062 1707	0,0058 7010	0,0055 3755	0,0052 1922	0,0049 1488	129
30	0,0065 1942	0,0061 5825	0,0058 1177	0,0054 7981	0,0051 6216	0,0048 5861	130
31	0,0064 6115	0,0061 0035	0,0057 5435	0,0054 2298	0,0051 0602	0,0048 0325	131
32	0,0064 0376	0,0060 4334	0,0056 9782	0,0053 6703	0,0050 5077	0,0047 4878	132
33	0,0063 4725	0,0059 8720	0,0056 4216	0,0053 1197	0,0049 9639	0,0046 9518	133
34	0,0062 9159	0,0059 3191	0,0055 8736	0,0052 5775	0,0049 4286	0,0046 4244	134
35	0,0062 3675	0,0058 7745	0,0055 3339	0,0052 0436	0,0048 9016	0,0045 9052	135
36	0,0061 8274	0,0058 2381	0,0054 8023	0,0051 5179	0,0048 3828	0,0045 3942	136
37	0,0061 2952	0,0057 7097	0,0054 2787	0,0051 0002	0,0047 8719	0,0044 8911	137
38	0,0060 7707	0,0057 1890	0,0053 7628	0,0050 4902	0,0047 3688	0,0044 3959	138
39	0,0060 2539	0,0056 6760	0,0053 2546	0,0049 9879	0,0046 8733	0,0043 9082	139
40	0,0059 7446	0,0056 1704	0,0052 7539	0,0049 4930	0,0046 3853	0,0043 4280	140
41	0,0059 2425	0,0055 6721	0,0052 2604	0,0049 0055	0,0045 9046	0,0042 9551	141
42	0,0058 7476	0,0055 1809	0,0051 7741	0,0048 5250	0,0045 4311	0,0042 4893	142
43	0,0058 2597	0,0054 6968	0,0051 2948	0,0048 0516	0,0044 9645	0,0042 0305	143
44	0,0057 7787	0,0054 2195	0,0050 8224	0,0047 5850	0,0044 5048	0,0041 5786	144
45	0,0057 3043	0,0053 7489	0,0050 3566	0,0047 1252	0,0044 0518	0,0041 1333	145
46	0,0056 8365	0,0053 2849	0,0049 8975	0,0046 6718	0,0043 6053	0,0040 6947	146
47	0,0056 3752	0,0052 8273	0,0049 4447	0,0046 2250	0,0043 1653	0,0040 2624	147
48	0,0055 9201	0,0052 3760	0,0048 9983	0,0045 7844	0,0042 7316	0,0039 8364	148
49	0,0055 4712	0,0051 9309	0,0048 5580	0,0045 3500	0,0042 3040	0,0039 4166	149
50	0,0055 0284	0,0051 4919	0,0048 1238	0,0044 9217	0,0041 8825	0,0039 0029	150

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} + i\right)$$

n	$\frac{3}{4}\%$	1%	$1\frac{1}{4}\%$	$1\frac{1}{2}\%$	$1\frac{3}{4}\%$	2%	n
1	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1
2	0,4981 3200	0,4975 1244	0,4968 9441	0,4962 7792	0,4956 6295	0,4950 4950	2
3	0,3308 4579	0,3300 2211	0,3292 0117	0,3283 8296	0,3275 6746	0,3267 5467	3
4	0,2472 0501	0,2462 8109	0,2453 6102	0,2444 4479	0,2435 3237	0,2426 2375	4
5	0,1970 2242	0,1960 3980	0,1950 6211	0,1940 8932	0,1931 2142	0,1921 5839	5
6	0,1635 6891	0,1625 4837	0,1615 3381	0,1605 2521	0,1595 2256	0,1585 2581	6
7	0,1396 7488	0,1386 2828	0,1375 8872	0,1365 5616	0,1355 3059	0,1345 1196	7
8	0,1217 5552	0,1206 9029	0,1196 3314	0,1185 8402	0,1175 4292	0,1165 0980	8
9	0,1078 1929	0,1067 4036	0,1056 7055	0,1046 0982	0,1035 5813	0,1025 1544	9
10	0,0966 7123	0,0955 8208	0,0945 0307	0,0934 3418	0,0923 7534	0,0913 2653	10
11	0,0875 5094	0,0864 5408	0,0853 6839	0,0842 9384	0,0832 3038	0,0821 7794	11
12	0,0799 5148	0,0788 4879	0,0777 5831	0,0766 7999	0,0756 1377	0,0745 5960	12
13	0,0735 2188	0,0724 1482	0,0713 2100	0,0702 4036	0,0691 7283	0,0681 1835	13
14	0,0680 1146	0,0669 0117	0,0658 0515	0,0647 2332	0,0636 5562	0,0626 0197	14
15	0,0632 3639	0,0621 2378	0,0610 2646	0,0599 4436	0,0588 7739	0,0578 2547	15
16	0,0590 5879	0,0579 4460	0,0568 4672	0,0557 6508	0,0546 9958	0,0536 5013	16
17	0,0553 7321	0,0542 5806	0,0531 6023	0,0520 7966	0,0510 1623	0,0499 6984	17
18	0,0520 9766	0,0509 8205	0,0498 8479	0,0488 0578	0,0477 4492	0,0467 0210	18
19	0,0491 6740	0,0480 5175	0,0469 5548	0,0458 7847	0,0448 2061	0,0437 8177	19
20	0,0465 3063	0,0454 1531	0,0443 2039	0,0432 4574	0,0421 9122	0,0411 5672	20
21	0,0441 4543	0,0430 3075	0,0419 3749	0,0408 6550	0,0398 1464	0,0387 8477	21
22	0,0419 7748	0,0408 6372	0,0397 7238	0,0387 0332	0,0376 5638	0,0366 3140	22
23	0,0399 9846	0,0388 8584	0,0377 9666	0,0367 3075	0,0356 8796	0,0346 6810	23
24	0,0381 8474	0,0370 7347	0,0359 8665	0,0349 2410	0,0338 8565	0,0328 7110	24
25	0,0365 1650	0,0354 0675	0,0343 2247	0,0332 6345	0,0322 2952	0,0312 2044	25
26	0,0349 7693	0,0338 6888	0,0327 8729	0,0317 3196	0,0307 0269	0,0296 9923	26
27	0,0335 5176	0,0324 4553	0,0313 6677	0,0303 1527	0,0292 9079	0,0282 9309	27
28	0,0322 2871	0,0311 2444	0,0300 4863	0,0290 0108	0,0279 8151	0,0269 8967	28
29	0,0309 9723	0,0298 9502	0,0288 2228	0,0277 7878	0,0267 6424	0,0257 7836	29
30	0,0298 4816	0,0287 4811	0,0276 7854	0,0266 3919	0,0256 2975	0,0246 4992	30
31	0,0287 7352	0,0276 7573	0,0266 0942	0,0255 7430	0,0245 7005	0,0235 9635	31
32	0,0277 6634	0,0266 7089	0,0256 0791	0,0245 7710	0,0235 7812	0,0226 1061	32
33	0,0268 2048	0,0257 2744	0,0246 6786	0,0236 4144	0,0226 4779	0,0216 8653	33
34	0,0259 3053	0,0248 3997	0,0237 8387	0,0227 6189	0,0217 7363	0,0208 1867	34
35	0,0250 9170	0,0240 0368	0,0229 5111	0,0219 3363	0,0209 5082	0,0200 0221	35
36	0,0242 9973	0,0232 1431	0,0221 6533	0,0211 5240	0,0201 7507	0,0192 3285	36
37	0,0235 5082	0,0224 6805	0,0214 2270	0,0204 1437	0,0194 4257	0,0185 0678	37
38	0,0228 4157	0,0217 6150	0,0207 1983	0,0197 1613	0,0187 4990	0,0178 2057	38
39	0,0221 6893	0,0210 9160	0,0200 5365	0,0190 5463	0,0180 9399	0,0171 7114	39
40	0,0215 3016	0,0204 5560	0,0194 2141	0,0184 2710	0,0174 7209	0,0165 5575	40
41	0,0209 2276	0,0198 5102	0,0188 2063	0,0178 3106	0,0168 8170	0,0159 7188	41
42	0,0203 4452	0,0192 7563	0,0182 4906	0,0172 6426	0,0163 2057	0,0154 1729	42
43	0,0197 9338	0,0187 2737	0,0177 0466	0,0167 2465	0,0157 8666	0,0148 8993	43
44	0,0192 6751	0,0182 0441	0,0171 8557	0,0162 1038	0,0152 7810	0,0143 8794	44
45	0,0187 6521	0,0177 0505	0,0166 9012	0,0157 1976	0,0147 9321	0,0139 0962	45
46	0,0182 8495	0,0172 2775	0,0162 1675	0,0152 5125	0,0143 3043	0,0134 5342	46
47	0,0178 2532	0,0167 7111	0,0157 6406	0,0148 0342	0,0138 8836	0,0130 1792	47
48	0,0173 8504	0,0163 3384	0,0153 3075	0,0143 7500	0,0134 6569	0,0126 0184	48
49	0,0169 6292	0,0159 1474	0,0149 1563	0,0139 6478	0,0130 6124	0,0122 0396	49
50	0,0165 5787	0,0155 1273	0,0145 1763	0,0135 7168	0,0126 7391	0,0118 2321	50

TABLA XIV. Pago periódico de una anualidad cuyo monto es 1

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} + i\right)$$

n	$\frac{3}{4}\%$	1%	$1\frac{1}{4}\%$	$1\frac{1}{2}\%$	$1\frac{3}{4}\%$	2%	n
51	0,0161 6888	0,0151 2680	0,0141 3571	0,0131 9469	0,0123 0269	0,0114 5856	51
52	0,0157 9503	0,0147 5603	0,0137 6897	0,0128 3287	0,0119 4665	0,0111 0909	52
53	0,0154 3546	0,0143 9956	0,0134 1653	0,0124 8537	0,0116 0492	0,0107 7392	53
54	0,0150 8938	0,0140 5658	0,0130 7760	0,0121 5138	0,0112 7672	0,0104 5226	54
55	0,0147 5605	0,0137 2637	0,0127 5145	0,0118 3018	0,0109 6129	0,0101 4337	55
56	0,0144 3478	0,0134 0824	0,0124 3739	0,0115 2106	0,0106 5795	0,0098 4656	56
57	0,0141 2496	0,0131 0156	0,0121 3478	0,0112 2341	0,0103 6606	0,0095 6120	57
58	0,0138 2597	0,0128 0573	0,0118 4303	0,0109 3661	0,0100 8503	0,0092 8667	58
59	0,0135 3727	0,0125 2020	0,0115 6158	0,0106 6012	0,0098 1430	0,0090 2243	59
60	0,0132 5836	0,0122 4445	0,0112 8993	0,0103 9343	0,0095 5336	0,0087 6797	60
61	0,0129 8873	0,0119 7800	0,0110 2758	0,0101 3604	0,0093 0172	0,0085 2278	61
62	0,0127 2795	0,0117 2041	0,0107 7410	0,0098 8751	0,0090 5892	0,0082 8643	62
63	0,0124 7560	0,0114 7125	0,0105 2904	0,0096 4741	0,0088 2455	0,0080 5848	63
64	0,0122 3127	0,0112 3013	0,0102 9203	0,0094 1534	0,0085 9821	0,0078 3855	64
65	0,0119 9460	0,0109 9667	0,0100 6268	0,0091 9094	0,0083 7952	0,0076 2624	65
66	0,0117 6524	0,0107 7052	0,0098 4065	0,0089 7386	0,0081 6813	0,0074 2122	66
67	0,0115 4286	0,0105 5136	0,0096 2560	0,0087 6376	0,0079 6372	0,0072 2316	67
68	0,0113 2716	0,0103 3889	0,0094 1724	0,0085 6033	0,0077 6597	0,0070 3173	68
69	0,0111 1785	0,0101 3280	0,0092 1527	0,0083 6329	0,0075 7459	0,0068 4665	69
70	0,0109 1464	0,0099 3282	0,0090 1941	0,0081 7235	0,0073 8930	0,0066 6765	70
71	0,0107 1728	0,0097 3870	0,0088 2941	0,0079 8727	0,0072 0985	0,0064 9446	71
72	0,0105 2554	0,0095 5019	0,0086 4501	0,0078 0779	0,0070 3600	0,0063 2683	72
73	0,0103 3917	0,0093 6706	0,0084 6600	0,0076 3368	0,0068 6750	0,0061 6454	73
74	0,0101 5796	0,0091 8910	0,0082 9215	0,0074 6473	0,0067 0413	0,0060 0736	74
75	0,0099 8170	0,0090 1609	0,0081 2325	0,0073 0072	0,0065 4570	0,0058 5508	75
76	0,0098 1020	0,0088 4784	0,0079 5910	0,0071 4146	0,0063 9200	0,0057 0751	76
77	0,0096 4328	0,0086 8416	0,0077 9953	0,0069 8676	0,0062 4285	0,0055 6447	77
78	0,0094 8074	0,0085 2488	0,0076 4436	0,0068 3645	0,0060 9806	0,0054 2576	78
79	0,0093 2244	0,0083 6983	0,0074 9341	0,0066 9036	0,0059 5748	0,0052 9123	79
80	0,0091 6821	0,0082 1885	0,0073 4652	0,0065 4832	0,0058 2093	0,0051 6071	80
81	0,0090 1790	0,0080 7179	0,0072 0356	0,0064 1019	0,0056 8828	0,0050 3405	81
82	0,0088 7136	0,0079 2851	0,0070 6437	0,0062 7583	0,0055 5936	0,0049 1110	82
83	0,0087 2847	0,0077 8887	0,0069 2881	0,0061 4509	0,0054 3406	0,0047 9173	83
84	0,0085 8908	0,0076 5273	0,0067 9675	0,0060 1784	0,0053 1223	0,0046 7581	84
85	0,0084 5308	0,0075 1998	0,0066 6808	0,0058 9396	0,0051 9375	0,0045 6321	85
86	0,0083 2034	0,0073 9050	0,0065 4267	0,0057 7333	0,0050 7850	0,0044 5381	86
87	0,0081 9076	0,0072 6418	0,0064 2041	0,0056 5584	0,0049 6636	0,0043 4750	87
88	0,0080 6423	0,0071 4089	0,0063 0119	0,0055 4138	0,0048 5724	0,0042 4416	88
89	0,0079 4064	0,0070 2056	0,0061 8491	0,0054 2984	0,0047 5102	0,0041 4370	89
90	0,0078 1989	0,0069 0306	0,0060 7146	0,0053 2113	0,0046 4760	0,0040 4602	90
91	0,0077 0190	0,0067 8832	0,0059 6076	0,0052 1516	0,0045 4690	0,0039 5101	91
92	0,0075 8657	0,0066 7624	0,0058 5272	0,0051 1182	0,0044 4882	0,0038 5859	92
93	0,0074 7382	0,0065 6673	0,0057 4724	0,0050 1104	0,0043 5327	0,0037 6868	93
94	0,0073 6356	0,0064 5971	0,0056 4425	0,0049 1273	0,0042 6017	0,0036 8118	94
95	0,0072 5571	0,0063 5511	0,0055 4366	0,0048 1681	0,0041 6944	0,0035 9602	95
96	0,0071 5020	0,0062 5284	0,0054 4541	0,0047 2321	0,0040 8101	0,0035 1313	96
97	0,0070 4696	0,0061 5284	0,0053 4941	0,0046 3186	0,0039 9480	0,0034 3242	97
98	0,0069 4592	0,0060 5503	0,0052 5560	0,0045 4268	0,0039 1074	0,0033 5383	98
99	0,0068 4701	0,0059 5936	0,0051 6391	0,0044 5560	0,0038 2876	0,0032 7729	99
100	0,0067 5017	0,0058 6574	0,0050 7428	0,0043 7057	0,0037 4880	0,0032 0274	100

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} + i\right)$$

n	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%	n
1	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1
2	0,4938 2716	0,4926 1084	0,4914 0049	0,4901 9608	0,4889 9756	0,4878 0488	2
3	0,3251 3717	0,3235 3036	0,3219 3418	0,3203 4854	0,3187 7336	0,3172 0856	3
4	0,2408 1788	0,2390 2705	0,2372 5114	0,2354 9005	0,2337 4365	0,2320 1183	4
5	0,1902 4686	0,1883 5457	0,1864 8137	0,1846 2711	0,1827 9164	0,1809 7480	5
6	0,1565 4997	0,1545 9750	0,1526 6821	0,1507 6190	0,1488 7839	0,1470 1747	6
7	0,1324 9543	0,1305 0635	0,1285 4449	0,1266 0961	0,1247 0147	0,1228 1982	7
8	0,1144 6735	0,1124 5639	0,1104 7665	0,1085 2783	0,1066 0965	0,1047 2181	8
9	0,1004 5689	0,0984 3386	0,0964 4601	0,0944 9299	0,0925 7447	0,0906 9008	9
10	0,0892 5876	0,0872 3051	0,0852 4137	0,0832 9094	0,0813 7882	0,0795 0457	10
11	0,0801 0596	0,0780 7745	0,0760 9197	0,0741 4904	0,0722 4818	0,0703 8889	11
12	0,0724 8713	0,0704 6209	0,0684 8395	0,0665 5217	0,0646 6619	0,0628 2541	12
13	0,0660 4827	0,0640 2954	0,0620 6157	0,0601 4373	0,0582 7535	0,0564 5577	13
14	0,0605 3652	0,0585 2634	0,0565 7073	0,0546 6897	0,0528 2032	0,0510 2397	14
15	0,0557 6646	0,0537 6658	0,0518 2507	0,0499 4110	0,0481 1381	0,0463 4229	15
16	0,0515 9899	0,0496 1085	0,0476 8483	0,0458 2000	0,0440 1537	0,0422 6991	16
17	0,0479 2777	0,0459 5253	0,0440 4313	0,0421 9852	0,0404 1758	0,0386 9914	17
18	0,0446 7008	0,0427 0870	0,0408 1684	0,0389 9333	0,0372 3690	0,0355 4622	18
19	0,0417 6062	0,0398 1388	0,0379 4033	0,0361 3862	0,0344 0734	0,0327 4501	19
20	0,0391 4713	0,0372 1571	0,0353 6108	0,0335 8175	0,0318 7614	0,0302 4259	20
21	0,0367 8733	0,0348 7178	0,0330 3659	0,0312 8011	0,0296 0057	0,0279 9611	21
22	0,0346 4661	0,0327 4739	0,0309 3207	0,0291 9881	0,0275 4565	0,0259 7051	22
23	0,0326 9638	0,0308 1390	0,0290 1880	0,0273 0906	0,0256 8249	0,0241 3682	23
24	0,0309 1282	0,0290 4742	0,0272 7283	0,0255 8683	0,0239 8703	0,0224 7090	24
25	0,0292 7592	0,0274 2787	0,0256 7404	0,0240 1196	0,0224 3903	0,0209 5246	25
26	0,0277 6875	0,0259 3829	0,0242 0540	0,0225 6738	0,0210 2137	0,0195 6432	26
27	0,0263 7687	0,0245 6421	0,0228 5241	0,0212 3854	0,0197 1946	0,0182 9186	27
28	0,0250 8793	0,0232 9323	0,0216 0265	0,0200 1298	0,0185 2081	0,0171 2253	28
29	0,0238 9127	0,0221 1467	0,0204 4538	0,0188 7993	0,0174 1461	0,0160 4551	29
30	0,0227 7764	0,0210 1926	0,0193 7133	0,0178 3010	0,0163 9154	0,0150 5144	30
31	0,0217 3900	0,0199 9893	0,0183 7240	0,0168 5535	0,0154 4345	0,0141 3212	31
32	0,0207 6831	0,0190 4662	0,0174 4150	0,0159 4859	0,0145 6320	0,0132 8042	32
33	0,0198 5938	0,0181 5612	0,0165 7242	0,0151 0357	0,0137 4453	0,0124 9004	33
34	0,0190 0675	0,0173 2196	0,0157 5966	0,0143 1477	0,0129 8191	0,0117 5545	34
35	0,0182 0558	0,0165 3929	0,0149 9835	0,0135 7732	0,0122 7045	0,0110 7171	35
36	0,0174 5158	0,0158 0379	0,0142 8416	0,0128 8688	0,0116 0578	0,0104 3446	36
37	0,0167 4090	0,0151 1162	0,0136 1325	0,0122 3957	0,0109 8402	0,0098 3979	37
38	0,0160 7012	0,0144 5934	0,0129 8214	0,0116 3192	0,0104 0169	0,0092 8423	38
39	0,0154 3615	0,0138 4385	0,0123 8775	0,0110 6083	0,0098 5567	0,0087 6462	39
40	0,0148 3623	0,0132 6238	0,0118 2728	0,0105 2349	0,0093 4315	0,0082 7816	40
41	0,0142 6786	0,0127 1241	0,0112 9822	0,0100 1738	0,0088 6158	0,0078 2229	41
42	0,0137 2876	0,0121 9167	0,0107 9828	0,0095 4020	0,0084 0868	0,0073 9471	42
43	0,0132 1688	0,0116 9811	0,0103 2539	0,0090 8989	0,0079 8235	0,0069 9333	43
44	0,0127 3037	0,0112 2985	0,0098 7768	0,0086 6454	0,0075 8071	0,0066 1625	44
45	0,0122 6751	0,0107 8518	0,0094 5343	0,0082 6246	0,0072 0202	0,0062 6173	45
46	0,0118 2676	0,0103 6254	0,0090 5108	0,0078 8205	0,0068 4471	0,0059 2820	46
47	0,0114 0669	0,0099 6051	0,0086 6919	0,0075 2189	0,0065 0734	0,0056 1421	47
48	0,0110 0599	0,0095 7777	0,0083 0646	0,0071 8065	0,0061 8858	0,0053 1843	48
49	0,0106 2348	0,0092 1314	0,0079 6167	0,0068 5712	0,0058 8722	0,0050 3965	49
50	0,0102 5806	0,0088 6549	0,0076 3371	0,0065 5020	0,0056 0215	0,0047 7674	50

TABLA XIV. Pago periódico de una anualidad cuyo monto es 1

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} + i\right)$$

$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%	n
0.0099 0870	0.0085 3382	0.0073 2156	0,0062 5885	0.0053 3232	0.0045 2867	51
0.0095 7446	0.0082 1718	0.0070 2429	0.0059 8212	0.0050 7679	0.0042 9450	52
0.0092 5449	0.0079 1471	0.0067 4100	0.0057 1915	0.0048 3469	0.0040 7334	53
0.0089 4799	0.0076 2558	0.0064 7090	0.0054 6910	0.0046 0519	0.0038 6438	54
0.0086 5419	0.0073 4907	0.0062 1323	0.0052 3124	0.0043 8754	0.0036 6686	55
0.0083 7243	0.0070 8447	0.0059 6730	0.0050 0487	0.0041 8105	0.0034 8010	56
0.0081 0204	0.0068 3114	0.0057 3245	0.0047 8932	0.0039 8506	0.0033 0343	57
0.0078 4244	0.0065 8848	0.0055 0810	0.0045 8401	0.0037 9897	0.0031 3626	58
0.0075 9307	0.0063 5593	0.0052 9366	0.0043 8836	0.0036 2221	0.0029 7802	59
0.0073 5340	0.0061 3296	0.0050 8862	0.0042 0185	0.0034 5426	0.0028 2818	60
0.0071 2294	0.0059 1908	0.0048 9249	0.0040 2398	0.0032 9462	0.0026 8627	61
0.0069 0126	0.0057 1385	0.0047 0480	0.0038 5430	0.0031 4284	0.0025 5183	62
0.0066 8790	0.0055 1682	0.0045 2513	0.0036 9237	0.0029 9848	0.0024 2442	63
0.0064 8249	0.0053 2760	0.0043 5308	0.0035 3780	0.0028 6115	0.0023 0365	64
0.0062 8463	0.0051 4581	0.0041 8826	0.0033 9019	0.0027 3047	0.0021 8915	65
0.0060 9398	0.0049 7110	0.0040 3031	0.0032 4921	0.0026 0608	0.0020 8057	66
0.0059 1021	0.0048 0313	0.0038 7892	0.0031 1451	0.0024 8765	0.0019 7758	67
0.0057 3300	0.0046 4159	0.0037 3375	0.0029 8578	0.0023 7487	0.0018 7986	68
0.0055 6206	0.0044 8618	0.0035 9453	0.0028 6272	0.0022 6745	0.0017 8715	69
0.0053 9712	0.0043 3663	0.0034 6095	0.0027 4506	0.0021 6511	0.0016 9915	70
0.0052 3790	0.0041 9266	0.0033 3277	0.0026 3253	0.0020 6759	0.0016 1563	71
0.0050 8417	0.0040 5404	0.0032 0973	0.0025 2489	0.0019 7465	0.0015 3633	72
0.0049 3568	0.0039 2053	0.0030 9160	0.0024 2190	0.0018 8606	0.0014 6103	73
0.0047 9222	0.0037 9191	0.0029 7816	0.0023 2334	0.0018 0159	0.0013 8953	74
0.0046 5358	0.0036 6796	0.0028 6919	0.0022 2900	0.0017 2104	0.0013 2161	75
0.0045 1956	0.0035 4849	0.0027 6450	0.0021 3869	0.0016 4422	0.0012 5709	76
0.0043 8997	0.0034 3331	0.0026 6390	0.0020 5221	0.0015 7094	0.0011 9580	77
0.0042 6463	0.0033 2224	0.0025 6721	0.0019 6939	0.0015 0104	0.0011 3756	78
0.0041 4338	0.0032 1510	0.0024 7426	0.0018 9007	0.0014 3434	0.0010 8222	79
0.0040 2605	0.0031 1175	0.0023 8489	0.0018 1408	0.0013 7069	0.0010 2962	80
0.0039 1248	0.0030 1201	0.0022 9894	0.0017 4127	0.0013 0995	0.0009 7963	81
0.0038 0254	0.0029 1576	0.0022 1628	0.0016 7150	0.0012 5197	0.0009 3211	82
0.0036 9608	0.0028 2284	0.0021 3676	0.0016 0463	0.0011 9663	0.0008 8694	83
0.0035 9298	0.0027 3313	0.0020 6025	0.0015 4054	0.0011 4379	0.0008 4399	84
0.0034 9310	0.0026 4650	0.0019 8662	0.0014 7909	0.0010 9334	0.0008 0316	85
0.0033 9633	0.0025 6284	0.0019 1576	0.0014 2018	0.0010 4516	0.0007 6433	86
0.0033 0255	0.0024 8202	0.0018 4756	0.0013 6370	0.0009 9915	0.0007 2740	87
0.0032 1165	0.0024 0393	0.0017 8190	0.0013 0953	0.0009 5522	0.0006 9228	88
0.0031 2353	0.0023 2848	0.0017 1868	0.0012 5758	0.0009 1325	0.0006 5888	89
0.0030 3809	0.0022 5556	0.0016 5781	0.0012 0775	0.0008 7316	0.0006 2711	90
0.0029 5523	0.0021 8508	0.0015 9919	0.0011 5995	0.0008 3486	0.0005 9689	91
0.0028 7486	0.0021 1694	0.0015 4273	0.0011 1410	0.0007 9827	0.0005 6815	92
0.0027 9690	0.0020 5107	0.0014 8834	0.0010 7010	0.0007 6331	0.0005 4080	93
0.0027 2126	0.0019 8737	0.0014 3594	0.0010 2789	0.0007 2991	0.0005 1478	94
0.0026 4786	0.0019 2577	0.0013 8546	0.0009 8738	0.0006 9799	0.0004 9003	95
0.0025 7662	0.0018 6619	0.0013 3682	0.0009 4850	0.0006 6749	0.0004 6648	96
0.0025 0747	0.0018 0856	0.0012 8995	0.0009 1119	0.0006 3834	0.0004 4407	97
0.0024 4034	0.0017 5281	0.0012 4478	0.0008 7538	0.0006 1048	0.0004 2274	98
0.0023 7517	0.0016 9886	0.0012 0124	0.0008 4100	0.0005 8385	0.0004 0245	99
0,0023 1188	0.0016 4667	0.0011 5927	0.0008 0800	0.0005 5839	0.0003 8314	100

TABLA XIV. Pago periódico de una anualidad cuyo monto es 1

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} + i\right)$$

n	$5\frac{1}{2}\%$	6%	$6\frac{1}{2}\%$	7%	$7\frac{1}{2}\%$	8%	n
1	1,0000 0000	1.0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1
2	0,4866 1800	0,4854 3689	0,4842 6150	0,4830 9179	0,4819 2771	0,4807 6923	2
3	0,3156 5407	0,3141 0981	0,3125 7570	0,3110 5167	0,3095 3763	0,3080 3351	3
4	0,2302 9449	0,2285 9149	0,2269 0274	0,2252 2812	0,2235 6751	0,2219 2080	4
5	0,1791 7644	0,1773 9640	0,1756 3454	0,1738 9069	0,1721 6472	0,1704 5645	5
6	0,1451 7895	0,1433 6263	0,1415 6831	0,1397 9580	0,1380 4489	0,1363 1539	6
7	0,1209 6442	0,1191 3502	0,1173 3137	0,1155 5322	0,1138 0032	0,1120 7240	7
8	0,1028 6401	0,1010 3594	0,0992 3730	0,0974 6776	0,0957 2702	0,0940 1476	8
9	0,0888 3946	0,0870 2224	0,0852 3803	0,0834 8647	0,0817 6716	0,0800 7971	9
10	0,0776 6777	0,0758 6796	0,0741 0469	0,0723 7750	0,0706 8593	0,0690 2949	10
11	0,0685 7065	0,0667 9294	0,0650 5521	0,0633 5690	0,0616 9747	0,0600 7634	11
12	0,0610 2923	0,0592 7703	0,0575 6817	0,0559 0199	0,0542 7783	0,0526 9502	12
13	0,0546 8426	0,0529 6011	0,0512 8256	0,0496 5085	0,0480 6420	0,0465 2181	13
14	0,0492 7912	0,0475 8491	0,0459 4048	0,0443 4494	0,0427 9737	0,0412 9685	14
15	0,0446 2560	0,0429 6276	0,0413 5278	0,0397 9462	0,0382 8724	0,0368 2954	15
16	0,0405 8254	0,0389 5214	0,0373 7757	0,0358 5765	0,0343 9116	0,0329 7687	16
17	0,0370 4197	0,0354 4480	0,0339 0633	0,0324 2519	0,0310 0003	0,0296 2943	17
18	0,0339 1992	0,0323 5654	0,0308 5461	0,0294 1260	0,0280 2896	0,0267 0210	18
19	0,0311 5006	0,0296 2086	0,0281 5575	0,0267 5301	0,0254 1090	0,0241 2763	19
20	0,0286 7933	0,0271 8456	0,0257 5640	0,0243 9293	0,0230 9219	0,0218 5221	20
21	0,0264 6478	0,0250 0455	0,0236 1333	0,0222 8900	0,0210 2937	0,0198 3225	21
22	0,0244 7123	0,0230 4557	0,0216 9120	0,0204 0577	0,0191 8687	0,0180 3207	22
23	0,0226 6965	0,0212 7848	0,0199 6078	0,0187 1393	0,0175 3528	0,0164 2217	23
24	0,0210 3580	0,0196 7900	0,0183 9770	0,0171 8902	0,0160 5008	0,0149 7796	24
25	0,0195 4935	0,0182 2672	0,0169 8148	0,0158 1052	0,0147 1067	0,0136 7878	25
26	0,0181 9307	0,0169 0435	0,0156 9480	0,0145 6103	0,0134 9961	0,0125 0713	26
27	0,0169 5228	0,0156 9717	0,0145 2288	0,0134 2573	0,0124 0204	0,0114 4810	27
28	0,0158 1440	0,0145 9255	0,0134 5305	0,0123 9193	0,0114 0520	0,0104 8891	28
29	0,0147 6857	0,0135 7961	0,0124 7440	0,0114 4865	0,0104 9811	0,0096 1654	29
30	0,0138 0539	0,0126 4891	0,0115 7744	0,0105 8640	0,0096 7124	0,0088 2743	30
31	0,0129 1665	0,0117 9222	0,0107 5393	0,0097 9691	0,0089 1628	0,0081 0728	31
32	0,0120 9519	0,0110 0234	0,0099 9665	0,0090 7292	0,0082 2599	0,0074 5081	32
33	0,0113 3469	0,0102 7293	0,0092 9924	0,0084 0807	0,0075 9397	0,0068 5163	33
34	0,0106 2958	0,0095 9843	0,0086 5610	0,0077 9674	0,0070 1461	0,0063 0411	34
35	0,0099 7493	0,0089 7386	0,0080 6226	0,0072 3396	0,0064 8291	0,0058 0326	35
36	0,0093 6635	0,0083 9483	0,0075 1332	0,0067 1531	0,0059 9447	0,0053 4467	36
37	0,0087 9993	0,0078 5743	0,0070 0534	0,0062 3685	0,0055 4533	0,0049 2440	37
38	0,0082 7217	0,0073 5812	0,0065 3480	0,0057 9505	0,0051 3197	0,0045 3894	38
39	0,0077 7991	0,0068 9377	0,0060 9854	0,0053 8676	0,0047 5124	0,0041 8513	39
40	0,0073 2034	0,0064 6154	0,0056 9373	0,0050 0914	0,0044 0031	0,0038 6016	40
41	0,0068 9090	0,0060 5886	0,0053 1779	0,0046 5962	0,0040 7663	0,0035 6149	41
42	0,0064 8927	0,0056 8342	0,0049 6842	0,0043 3591	0,0037 7789	0,0032 8684	42
43	0,0061 1337	0,0053 3312	0,0046 4352	0,0040 3590	0,0035 0201	0,0030 3414	43
44	0,0057 6128	0,0050 0606	0,0043 4119	0,0037 5769	0,0032 4710	0,0028 0152	44
45	0,0054 3127	0,0047 0050	0,0040 5968	0,0034 9957	0,0030 1146	0,0025 8728	45
46	0,0051 2175	0,0044 1485	0,0037 9743	0,0032 5996	0,0027 9354	0,0023 8991	46
47	0,0048 3129	0,0041 4768	0,0035 5300	0,0030 3744	0,0025 9190	0,0022 0799	47
48	0,0045 5854	0,0038 9765	0,0033 2505	0,0028 3070	0,0024 0527	0,0020 4027	48
49	0,0043 0230	0,0036 6356	0,0031 1240	0,0026 3853	0,0022 3247	0,0018 8557	49
50	0,0040 6145	0,0034 4429	0,0029 1393	0,0024 5985	0,0020 7241	0,0017 4286	50

Edad x	Número de vivos l_x	Número de muertos d_x	D_x	N_x	M_x	Edad x
0	1.023.102	23.102				
1	1.000.000	5.770	975.609,76	30.351.127,80	235.338,3473	1
2	994.230	4.116	946.322,43	29.375.518,04	229.846,3782	2
3	990.114	3.347	919.419,28	28.429.195,61	226.024,2630	3
4	986.767	2.950	893.962,20	27.509.776,33	222.992,0462	4
5	983.817	2.715	869.550,88	26.615.814,13	220.384,6760	**5**
6	981.102	2.561	846.001,18	25.746.263,25	218.043,5400	6
7	978.541	2.417	823.212,53	24.900.262,07	215.889,0597	7
8	976.124	2.255	801.150,42	24.077.049,54	213.905,3152	8
9	973.869	2.065	779.804,53	23.275.899,12	212.099,6727	9
10	971.804	1.914	759.171,73	22.496.094,59	210.486,4980	**10**
11	969.890	1.852	739.196,60	21.736.922,86	209.027,7529	11
12	968.038	1.859	719.790,36	20.997.726,26	207.650,6874	12
13	966 179	1.913	700.885,94	20.277.935,90	206.302,1309	13
14	964.266	1.996	682.437,28	19.577.049,96	204.948,2488	14
15	962.270	2.069	664.414,29	18.894.612,68	203.570,0793	**15**
16	960.201	2.103	646.815,33	18.230.198,39	202.176,3495	16
17	958.098	2.156	629.657,27	17.583.383,06	200.794,2683	17
18	955.942	2.199	612.917,42	16.953.725,79	199.411,9146	18
19	953.743	2.260	596.592,68	16.340.808,37	198.036,3791	19
20	951.483	2.312	580.662,42	15.744.215,69	196.657,1668	**20**
21	949.171	2.382	565.123,40	15.163.553,27	195.280,6337	21
22	946.789	2.452	549.956,28	14.598.429,87	193.897,0141	22
23	944.337	2.531	535.153,17	14.048.473,59	192.507,4725	23
24	941.806	2.609	520.701,32	13.513.320,42	191.108,1450	24
25	939.197	2.705	506.594,02	12.992.619,10	189.700,8750	**25**
26	936.492	2.800	492.814,61	12.486.025,08	188.277,4101	26
27	933.692	2.904	479.357,22	11.993.210,47	186.839,8909	27
28	930.788	3.025	466.211,03	11.513.853,25	185.385,3418	28
29	927.763	3.154	453.361,83	11.047.642,22	183.907,1415	29
30	924.609	3.292	440.800,58	10.594.280,39	182.403,4951	**30**
31	921.317	3.437	428.518,18	10.153.479,81	180.872,3371	31
32	917.880	3.598	416.506,91	9.724.961,63	179.312,7277	32
33	914.282	3.767	404.755,37	9.308.454,72	177.719,8824	33
34	910.515	3.961	393.256,29	8.903.699,35	176.092,8950	34
35	906.554	4.161	381.995,63	8.510.443,06	174.423,8442	**35**
36	902.393	4.386	370.968,10	8.128.447,43	172.713,2832	36
37	898.007	4.625	360.161,02	7.757.479,33	170.954,2031	37
38	893.382	4.878	349.566,90	7.397.318,31	169.144,5103	38
39	888.504	5.162	339.178,75	7.047.751,41	167.282,3758	39
40	883.342	5.459	328.983,61	6.708.572,66	165.359,8889	**40**
41	877.883	5.785	318.976,11	6.379.589,05	163.376,3779	41
42	872.098	6.131	309.145,51	6.060.612,94	161.325,6832	42
43	865.967	6.503	299.485,04	5.751.467,43	159.205,3451	43
44	859.464	6.910	289.986,39	5.451.982,39	157.011,2084	44
45	852.554	7.340	280.638,95	5.161.996,00	154.736,6133	**45**
46	845.214	7.801	271.436,89	4.881.357,05	152.379,4034	46
47	837.413	8.299	262.372,33	4.609.920,16	149.935,2492	47
48	829.114	8.822	253.436,24	4.347.547,83	147.398,4842	48
49	820.292	9.392	244.624,00	4.094.111,59	144.767,6248	49

Edad x	Número de vivos l_x	Número de muertos d_x	D_x	N_x	M_x	Edad x
50	810.900	9.990	235.925,04	3.849.487,59	142.035.0956	**50**
51	800.910	10.628	227.335,15	3.613.562,55	139.199,4735	51
52	790.282	11.301	218.847,25	3.386.227,40	136.256,3361	52
53	778.981	12.020	210.456,33	3.167.380,15	133.203,1589	53
54	766.961	12.770	202.155,03	2.956.923,82	130.034,9360	54
55	754.191	13.560	193.940,61	2.754.768,79	126.751,1239	**55**
56	740.631	14.390	185.808,43	2.560.828,18	123.349,2108	56
57	726.241	15.251	177.754,43	2.375.019,75	119.827,1207	57
58	710.990	16.147	169.777,17	2.197.265,32	116.185,3372	58
59	694.843	17.072	161.874,57	2.027.488,15	112.423,6404	59
60	677.771	18.022	154.046,23	1.865.613,58	108.543,4550	**60**
61	659.749	18.988	146.292,80	1.711.567,35	104.547,2551	61
62	640.761	19.979	138.616,97	1.565.274,55	100.439,5471	62
63	620.782	20.958	131.019,40	1.426.657,58	96.222,8711	63
64	599.824	21.942	123.508,39	1.295.638,18	91.907,4573	64
65	577.882	22.907	116.088,15	1.172.129,79	87.499,6261	**65**
66	554.975	23.842	108.767,29	1.056.041,64	83.010,1764	66
67	531.133	24.730	101.555,70	947.274,35	78.451,4482	67
68	506.403	25.553	94.465,545	845.718,651	73.838,2589	68
69	480.850	26.302	87.511,050	751.253,106	69.187,8068	69
70	454.548	26.955	80.706,625	663.742,056	64.517,7925	**70**
71	427.593	27.481	74.068,942	583.035,431	59.848.5665	71
72	400.112	27.872	67.618,148	508.966,489	55.204,3311	72
73	372.240	28.104	61.373,498	441.348,341	50.608,9030	73
74	344.136	28.154	55.355,921	379.974,843	46.088,2403	74
75	315.982	28.009	49.587,526	324.618,922	41.669,9911	**75**
76	287.973	27.651	44.089,787	275.031,396	37.381,7042	76
77	260.322	27.071	38.884,206	230.941,609	33.251,4840	77
78	233.251	26.262	33.990,850	192.057,403	29.306,5222	78
79	206.989	25.224	29.428,077	158.066,553	25.572,7964	79
80	181.765	23.966	25.211,636	128.638,476	22.074,1123	**80**
81	157.799	22.502	21.353,602	103.426,840	18.830,9965	81
82	135.297	20.857	17.862,047	82.073,238	15.860,2597	82
83	114.440	19.062	14.739,984	64.211,191	13.173,8577	83
84	95.378	17.157	11.985,151	49.471,207	10.778,5365	84
85	78.221	15.185	9.589,4746	37.486,0561	8.675,1804	**85**
86	63.036	13.198	7.539,3905	27.896,5815	6.858,9858	86
87	49.838	11.245	5.815,4632	20.357,1910	5.318,9464	87
88	38.593	9.378	4.393,4773	14.541,7278	4.038,8010	88
89	29.215	7.638	3.244,7546	10.148,2505	2.997,2364	89
90	21.577	6.063	2.337,9929	6.903,4959	2.169,6149	**90**
91	15.514	4.681	1.640,0309	4.565,5030	1.528,6772	91
92	10.833	3.506	1.117,2571	2.925,4721	1.045,9042	92
93	7.327	2.540	737,2363	1.808,2150	693,1335	93
94	4.787	1.776	469,9158	1.070,9787	443,7944	94
95	3.011	1.193	288,3657	601,0629	273,7056	**95**
96	1.818	813	169,8646	312,6972	162,2378	96
97	1.005	551	91,6117	142,8326	88.1280	97
98	454	329	40,3755	51,2209	39,1261	98
99	125	125	10,8454	10,8454	10,5810	99

INDICE

INDICE